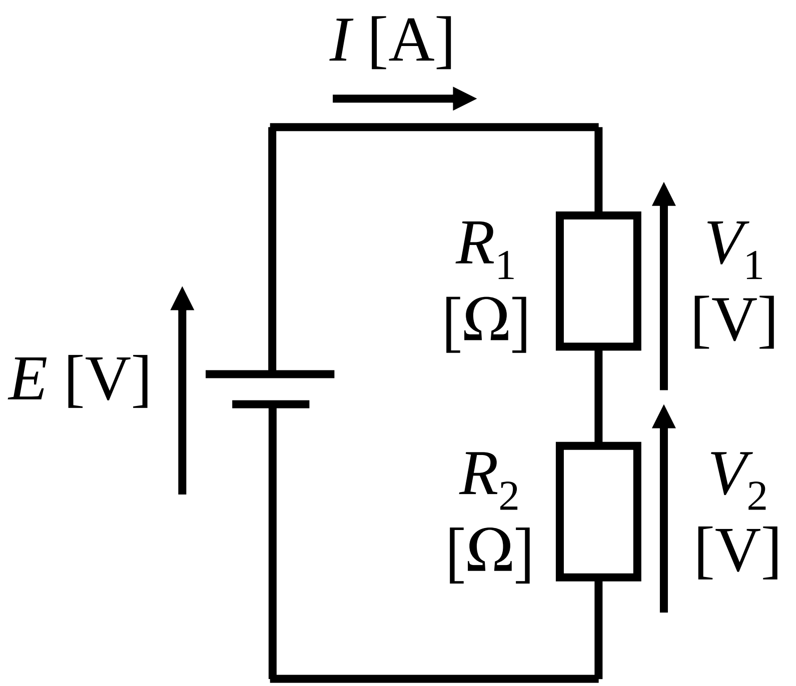
４．直流回路網の基本定理

4. Basic Theories of DC Circuit Network

講義内容

１．キルヒホッフの電圧則，電流則
２．キルヒホッフ則の適用
３．網目電流法

キルヒホッフの電圧則(Kirchhoff's Voltage Law)



キルヒホッフ の **電圧則**（ **KVL** ）

回路網中の任意の一つの閉路に沿って一方向に一周した起電力と負荷の端子電圧（向きを考慮）の総和は 0 となる

言い換えると…

ループ（閉回路）に生じている電圧には
位置エネルギー保存の法則 が成り立っている！

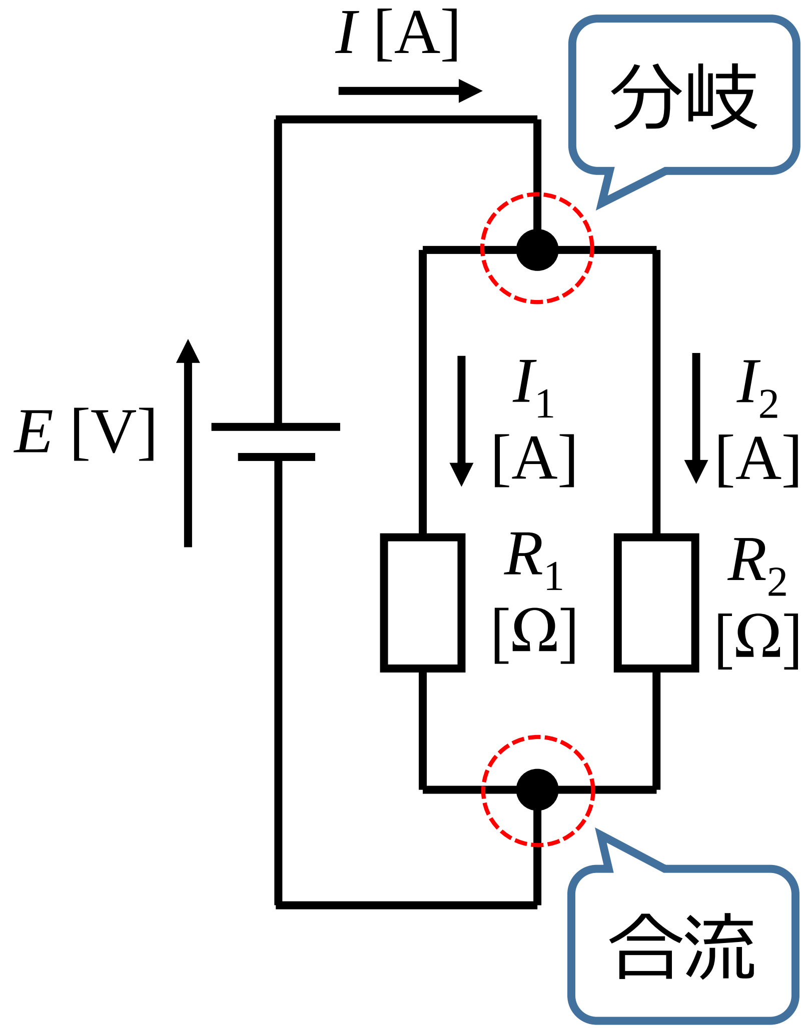
左の回路で考えると…

電源電圧

$$E = V_1 + V_2$$

分圧

キルヒホッフの電流則(Kirchhoff's Current Law)



キルヒホッフ の **電流則**（ **KCL** ）

回路網の任意の 1 点に流れ込む（又は流れ出す）電流の総和は 0 である

言い換えると…

ループ（閉回路）に流れている電流には **運動エネルギー保存の法則** が成り立っている！

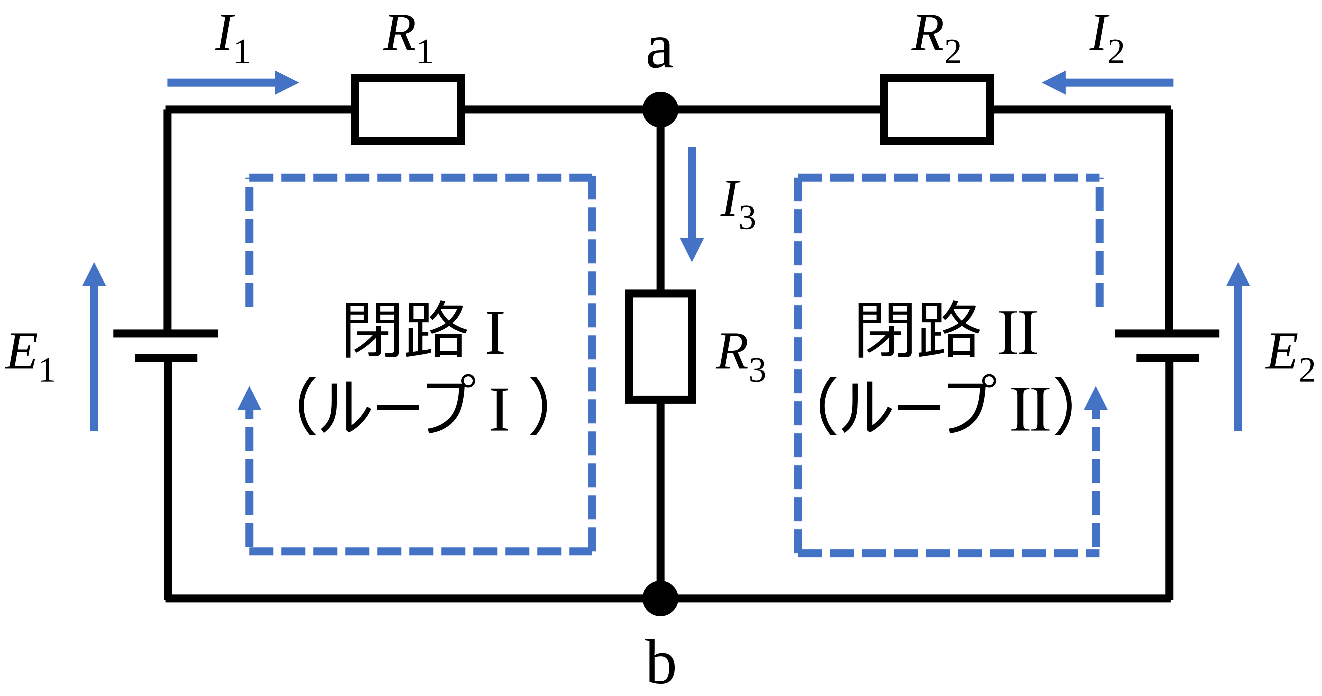
左の回路で考えると…

電源電流

$$I = I_1 + I_2$$

分流

キルヒホッフ則の適用：Y結線回路（T形回路）



回路中の **ループ** の数と
電流の経路をしっかりと把握すること

閉路 I において，**KVL** を適用すると

$$E_1 = R_1 I_1 + R_3 I_3 \qquad ①$$

閉路 II において，**KVL** を適用すると

$$E_2 = R_2 I_2 + R_3 I_3 \qquad ②$$

接点 a において，**KCL** を適用すると

$$I_3 = I_1 + I_2 \qquad ③$$

キルヒホッフ則の適用：Y結線回路（T形回路）

式①に式③を代入すると

$$E_1 = R_1 I_1 + R_3 \left(I_1 + I_2 \right) = \left(R_1 + R_3 \right) I_1 + R_3 I_2 \qquad ④$$

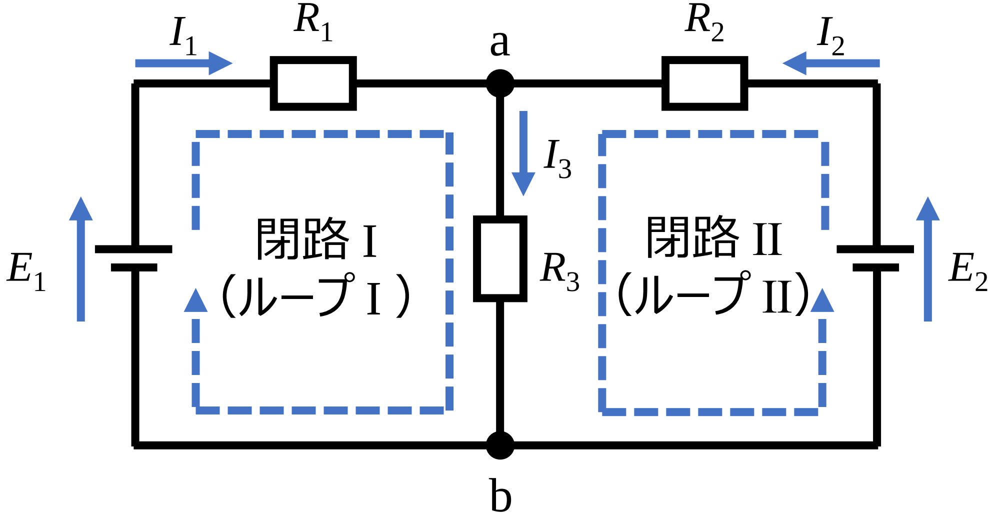
式②に式③を代入すると

$$E_2 = R_2 I_2 + R_3 \left(I_1 + I_2 \right) = R_3 I_1 + \left(R_2 + R_3 \right) I_2 \qquad ⑤$$

式④と式⑤をまとめると

$$\begin{cases} E_1 = \left(R_1 + R_3 \right) I_1 + R_3 I_2 \\ E_2 = R_3 I_1 + \left(R_2 + R_3 \right) I_2 \end{cases} \qquad ⑥$$

あとは⑥の連立方程式を解けばよい



クラメルの公式を用いた連立方程式の解法

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

行列式

連立方程式を解く場合
クラメル の公式が有効

$$\begin{cases} ax + by + cz = p \\ dx + ey + fz = q \\ gx + hy + iz = r \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} p & b & c \\ q & e & f \\ r & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & p & c \\ d & q & f \\ g & r & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & p \\ d & e & q \\ g & h & r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

クラメルの公式による各電流の導出

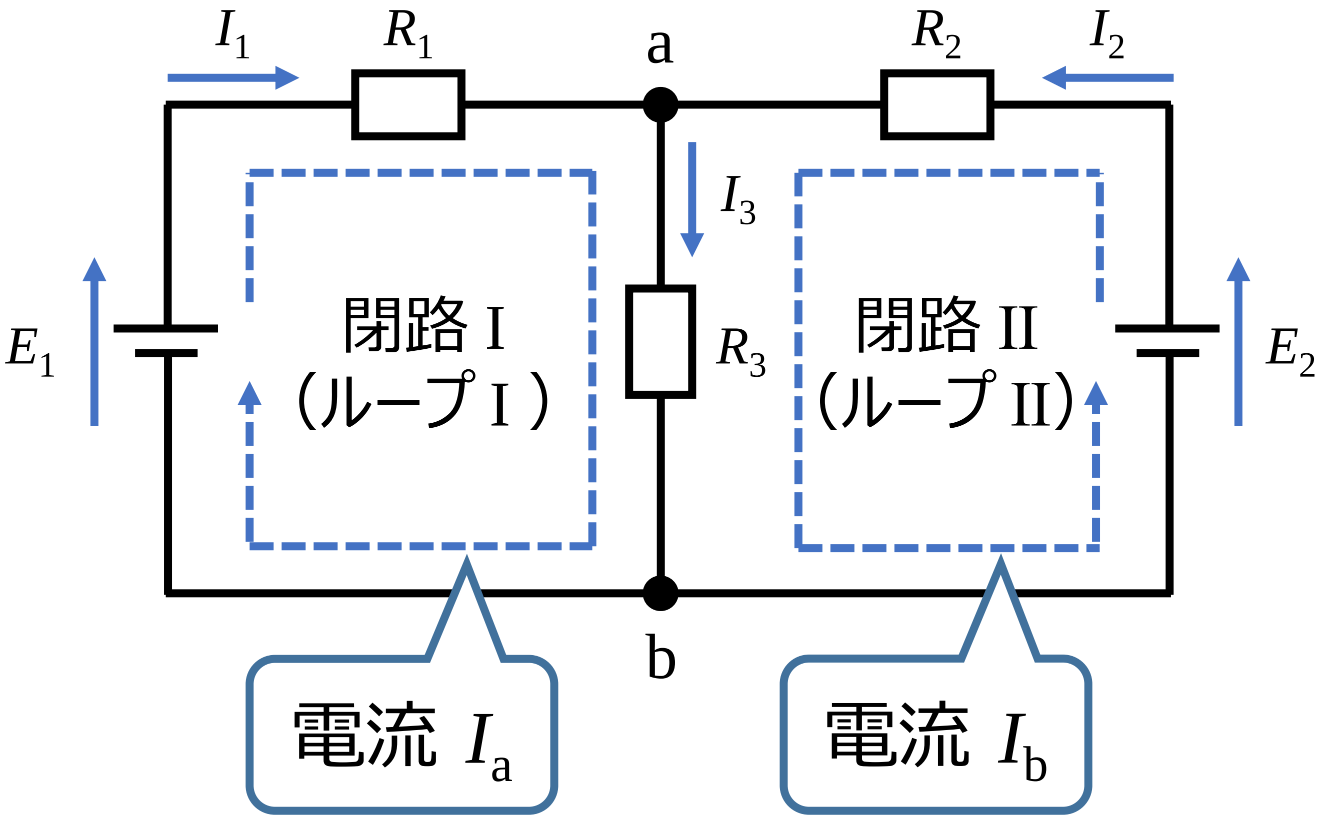
$$\begin{cases} E_1 = (R_1 + R_3) I_1 + R_3 I_2 \\ E_2 = R_3 I_1 + (R_2 + R_3) I_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} E_1 & R_3 \\ E_2 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}} = \dfrac{E_1 (R_2 + R_3) - E_2 R_3}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_3) - R_3{}^2} = \dfrac{E_1 (R_2 + R_3) - E_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \\ I_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & E_1 \\ R_3 & E_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}} = \dfrac{E_2 (R_1 + R_3) - E_1 R_3}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_3) - R_3{}^2} = \dfrac{E_2 (R_1 + R_3) - E_1 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \end{cases}$$

$$I_3 = I_1 + I_2 = \frac{E_1 (R_2 + R_3) - E_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} + \frac{E_2 (R_1 + R_3) - E_1 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

煩雑に見えるが
分母は **共通** なので
計算量は少ない

網目電流法（ループ電流法）



電流の **ループ** と電流の **向き** を
しっかりと考慮すること

各抵抗を流れる電流は，

$$\begin{cases} I_1 = I_a \\ I_2 = I_b \\ I_3 = I_a + I_b \end{cases}$$

各閉路において **KVL** を用いると，

$$\begin{cases} E_1 = (R_1 + R_3) I_a + R_3 I_b \\ E_2 = R_3 I_a + (R_2 + R_3) I_b \end{cases}$$

となり，前述の式と一致する

網目電流法を用いたブリッジ回路の電流の導出

各電流の向きを考慮すると，
各閉路の電流の関係式は

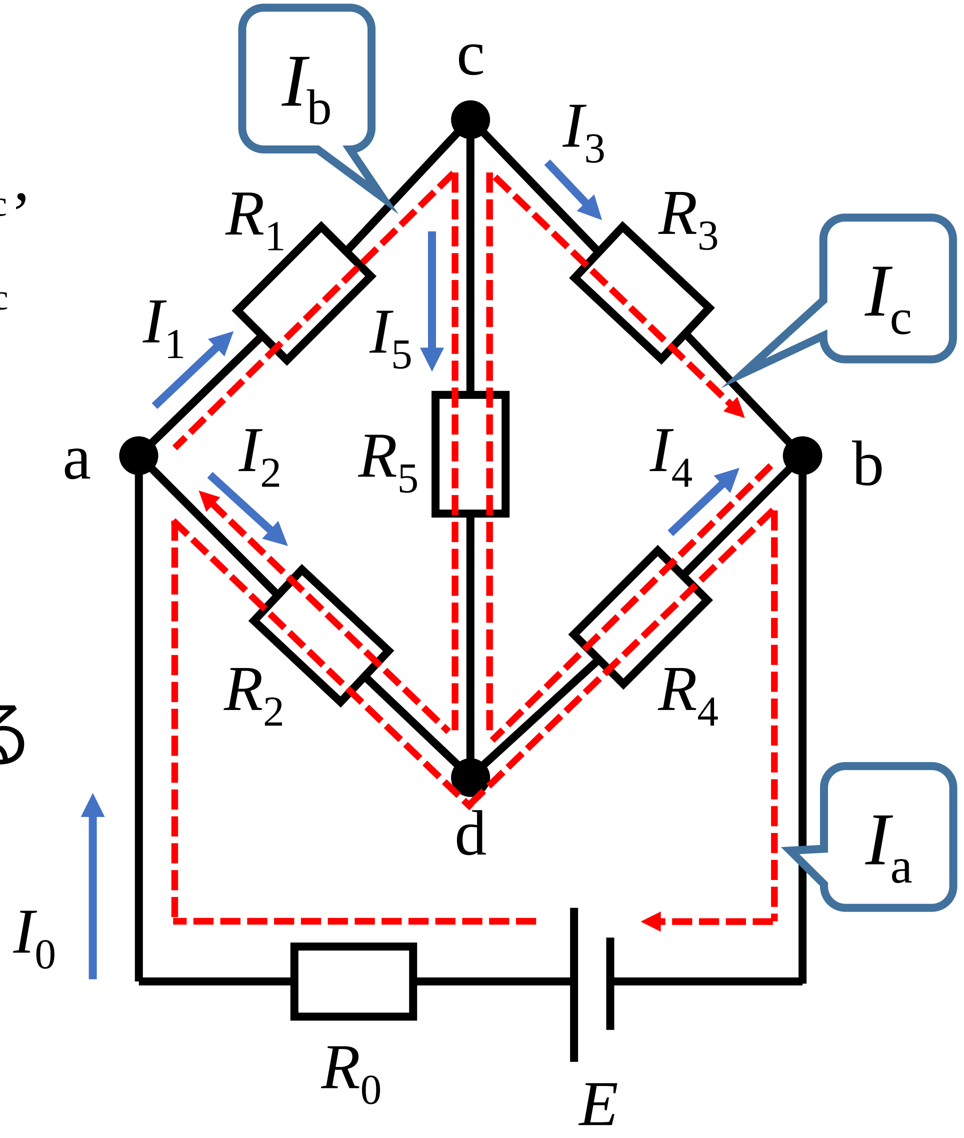
$$\begin{cases} I_0 = I_\mathrm{a}, & I_3 = I_\mathrm{c}, \\ I_1 = I_\mathrm{b}, & I_4 = I_\mathrm{a} - I_\mathrm{c}, \\ I_2 = I_\mathrm{a} - I_\mathrm{b}, & I_5 = I_\mathrm{b} - I_\mathrm{c} \end{cases}$$

各閉路において **KVL** を用いると，

$$\begin{cases} E = \left(R_0 + R_2 + R_4\right) I_\mathrm{a} - R_2 I_\mathrm{b} - R_4 I_\mathrm{c} \\ 0 = -R_2 I_\mathrm{a} + \left(R_1 + R_2 + R_5\right) I_\mathrm{b} - R_5 I_\mathrm{c} \\ 0 = -R_4 I_\mathrm{a} - R_5 I_\mathrm{b} + \left(R_3 + R_4 + R_5\right) I_\mathrm{c} \end{cases}$$

⇒ クラメルの公式を用いる

未知数が一時的に $I_0 \sim I_5$ の **6** つから $I_\mathrm{a} \sim I_\mathrm{c}$ の **3** つになっている！



クラメルの公式による各電流の導出

分母の行列式は各式に**共通**なので $\varDelta$ と置くと，

$$\varDelta = \begin{vmatrix} R_0+R_2+R_4 & -R_2 & -R_4 \\ -R_2 & R_1+R_2+R_5 & -R_5 \\ -R_4 & -R_5 & R_3+R_4+R_5 \end{vmatrix}$$

よって，各電流式は

$$\begin{cases} I_\mathrm{a} = \dfrac{1}{\varDelta}\begin{vmatrix} E & -R_2 & -R_4 \\ 0 & R_1+R_2+R_5 & -R_5 \\ 0 & -R_5 & R_3+R_4+R_5 \end{vmatrix} = \dfrac{E}{\varDelta}\left\{\left(R_1+R_2+R_5\right)\left(R_3+R_4+R_5\right)-{R_5}^2\right\} \\ I_\mathrm{b} = \dfrac{1}{\varDelta}\begin{vmatrix} R_0+R_2+R_4 & E & -R_4 \\ -R_2 & 0 & -R_5 \\ -R_4 & 0 & R_3+R_4+R_5 \end{vmatrix} = \dfrac{E}{\varDelta}\left\{R_4R_5+R_2\left(R_3+R_4+R_5\right)\right\} \\ I_\mathrm{c} = \dfrac{1}{\varDelta}\begin{vmatrix} R_0+R_2+R_4 & -R_2 & E \\ -R_2 & R_1+R_2+R_5 & 0 \\ -R_4 & -R_5 & 0 \end{vmatrix} = \dfrac{E}{\varDelta}\left\{R_2R_5+R_4\left(R_1+R_2+R_5\right)\right\} \end{cases}$$