# 8．交流回路の基本及び各種回路要素

## 8. Fundamental of the AC Electric Circuit and Various Circuit Elements

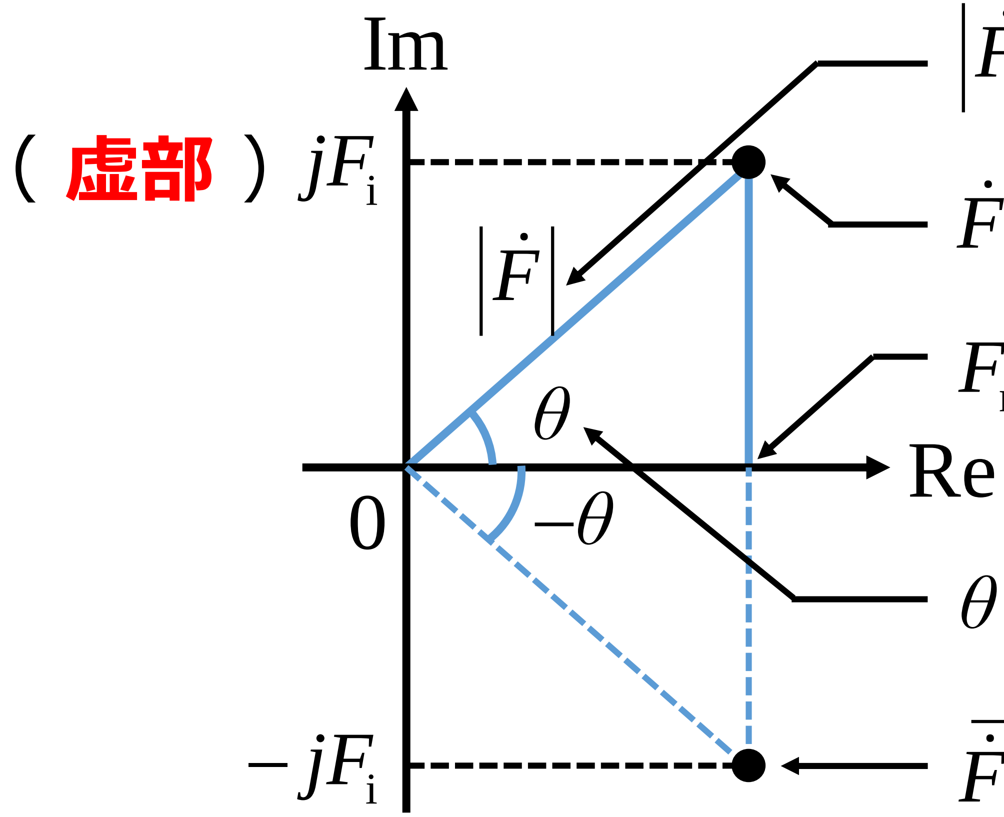
### 講義内容

1．交流回路計算の基本
2．フェーザ表示と複素数表示
3．回路要素：$R$, $L$, $C$

# 複素数の復習



<u>横軸が実数，縦軸が虚数の平面上</u>の1点を **複素数** という
（※平面の名前：**複素** 平面，**ガウス** 平面）




$|\dot{F}| = \sqrt{F_{\mathrm{r}}^{\ 2} + F_{\mathrm{i}}^{\ 2}}$ （ **大きさ** ）

$\dot{F} = F_{\mathrm{r}} + jF_{\mathrm{i}}$ （ 複素数 ）

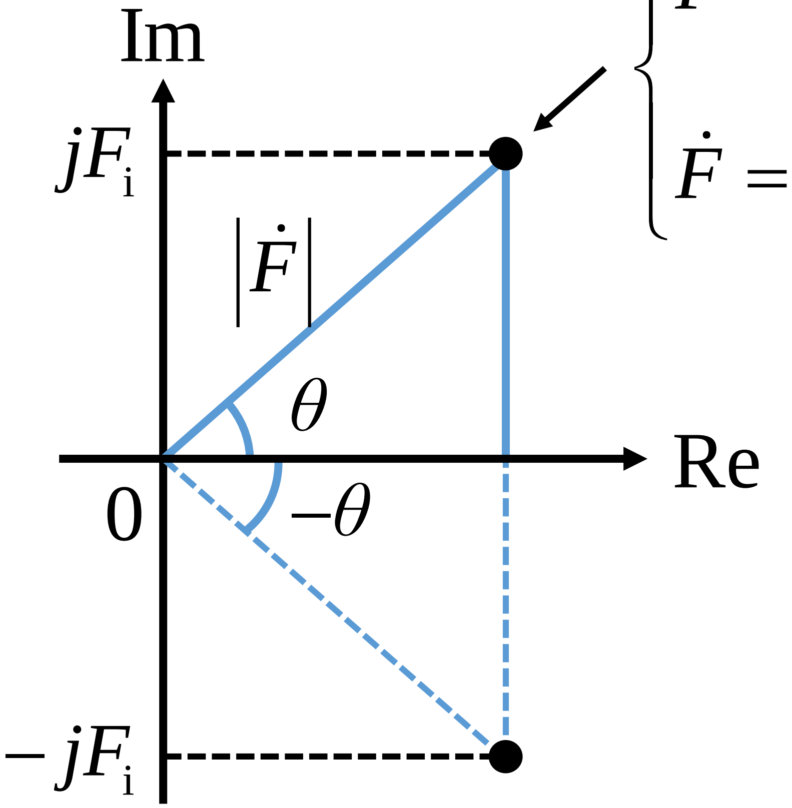
$F_{\mathrm{r}}$ （ **実部** ）

$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{F_{\mathrm{i}}}{F_{\mathrm{r}}}$ （ **位相** ）

$\bar{\dot{F}} = F_{\mathrm{r}} - jF_{\mathrm{i}}$ （ **共役** 複素数 ）

**Carolus Fridericus Gauss (1777～1855)**

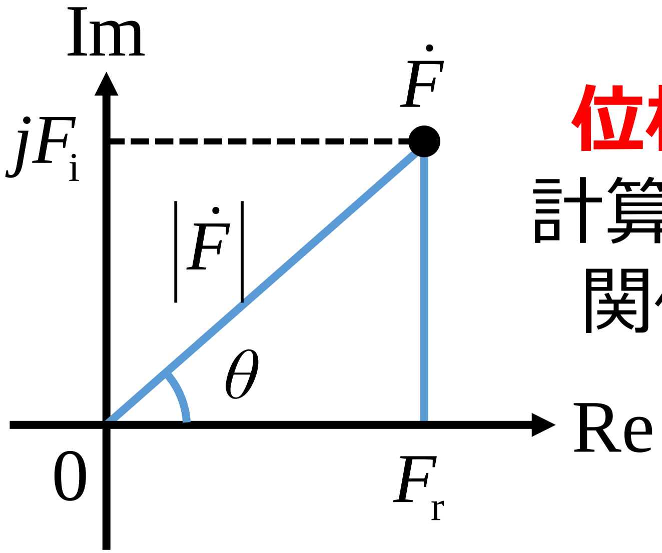
# 複素数表示と極表示（フェーザ表示）




$$\begin{cases} \dot{F} = F_r + jF_i = \sqrt{F_r^{\,2} + F_i^{\,2}}\angle \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{F_i}{F_r} \equiv \left|\dot{F}\right|\angle\theta \\ \dot{F} = \left|\dot{F}\right|\angle\theta = \left|\dot{F}\right|\cos\theta + j\left|\dot{F}\right|\sin\theta \equiv F_r + jF_i \end{cases}$$

複素数 ⇒ 極

極 ⇒ 複素数




**位相**（**位相角**）$\theta$を電卓で計算する場合，**象限**と**符号**の関係を把握する必要がある！

※第 **1** 象限はそのまま！

# 複素数の計算



$$\dot{F}_1 = F_{r1} + jF_{i1} = \left|\dot{F}_1\right| \angle\theta_1 \quad , \quad \dot{F}_2 = F_{r2} + jF_{i2} = \left|\dot{F}_2\right| \angle\theta_2$$

**加算（＋）** $\dot{F}_1 + \dot{F}_2 = \left(F_{r1} + jF_{i1}\right) + \left(F_{r2} + jF_{i2}\right) = \left(F_{r1} + F_{r2}\right) + j\left(F_{i1} + F_{i2}\right)$

**減算（－）** $\dot{F}_1 - \dot{F}_2 = \left(F_{r1} + jF_{i1}\right) - \left(F_{r2} + jF_{i2}\right) = \left(F_{r1} - F_{r2}\right) + j\left(F_{i1} - F_{i2}\right)$

**乗算（×）** $\dot{F}_1\dot{F}_2 = \left|\dot{F}_1\right| \angle\theta_1 \times \left|\dot{F}_2\right| \angle\theta_2 = \left|\dot{F}_1\right|\left|\dot{F}_2\right| \angle\left(\theta_1 + \theta_2\right)$

位相角は **和**

**除算（÷）** $\dfrac{\dot{F}_1}{\dot{F}_2} = \dfrac{\left|\dot{F}_1\right| \angle\theta_1}{\left|\dot{F}_2\right| \angle\theta_2} = \dfrac{\left|\dot{F}_1\right|}{\left|\dot{F}_2\right|} \angle\left(\theta_1 - \theta_2\right)$

位相角は **差**

加･減算：**複素数** 表示
乗･除算：**極** 表示
で計算を行う方が簡単

# 複素数計算の注意点



**加・減算**
$$\begin{cases}\dot{F}_1+\dot{F}_2=\left(F_{r1}+F_{r2}\right)+j\left(F_{i1}+F_{i2}\right)\\ \dot{F}_1-\dot{F}_2=\left(F_{r1}-F_{r2}\right)+j\left(F_{i1}-F_{i2}\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{F}_1+\dot{F}_2=\left|\dot{F}_1\right|+\left|\dot{F}_2\right|\angle\left(\theta_1+\theta_2\right)\\ \dot{F}_1-\dot{F}_2=\left|\dot{F}_1\right|-\left|\dot{F}_2\right|\angle\left(\theta_1-\theta_2\right)\end{cases}$$

右の計算式は **間違い** ！極表示は **加・減算** の計算はできないことに注意！

---

**乗算**
$$\dot{F}_1\dot{F}_2=\left(F_{r1}+jF_{i1}\right)\left(F_{r2}+jF_{i2}\right)=\underline{\left(F_{r1}F_{r2}-F_{i1}F_{i2}\right)}+j\underline{\left(F_{r1}F_{i2}+F_{i1}F_{r2}\right)}$$

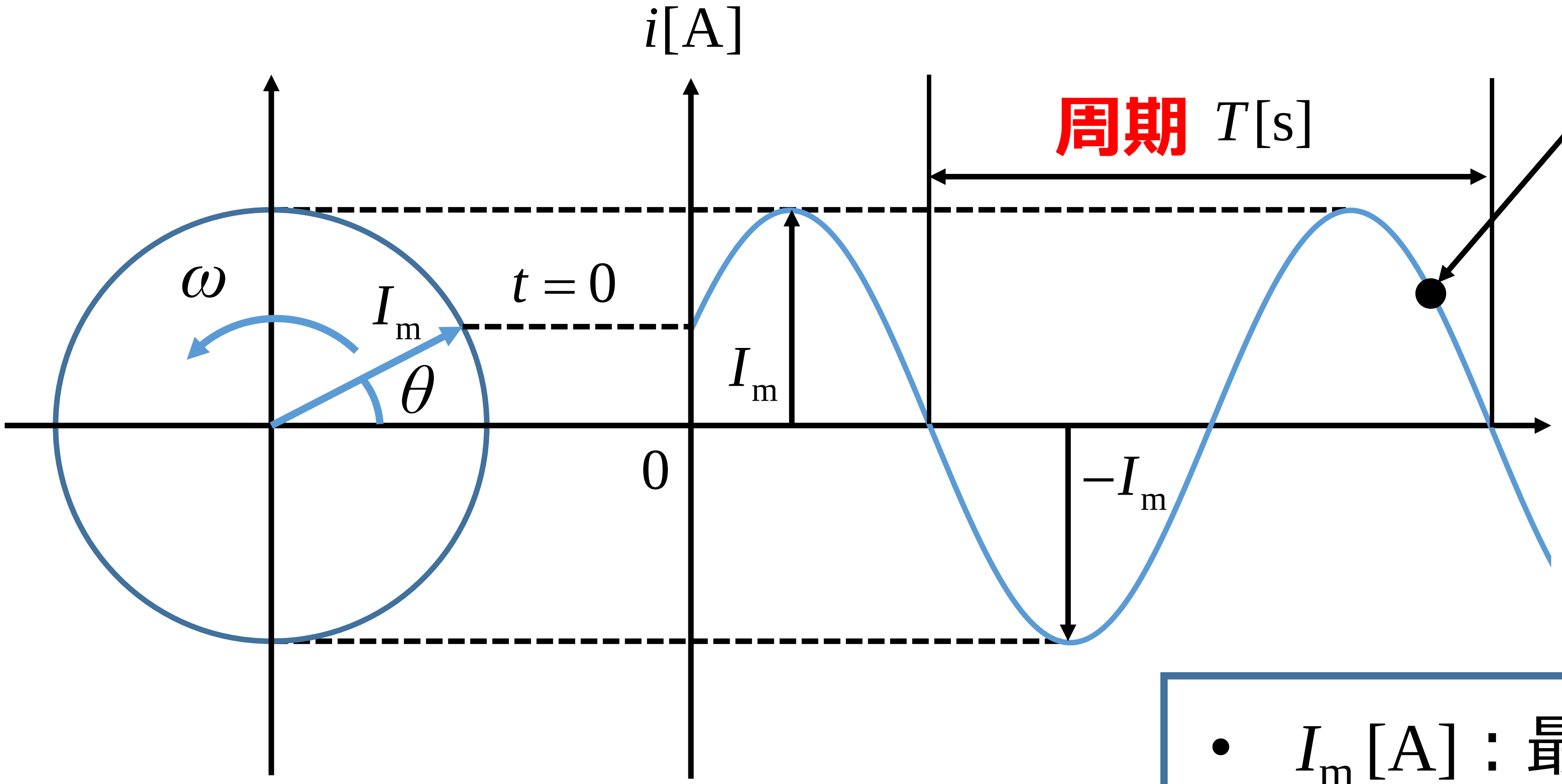
**除算**
$$\frac{\dot{F}_1}{\dot{F}_2}=\frac{F_{r1}+jF_{i1}}{F_{r2}+jF_{i2}}=\frac{\left(F_{r1}+jF_{i1}\right)\left(F_{r2}-jF_{i2}\right)}{\left(F_{r2}+jF_{i2}\right)\left(F_{r2}-jF_{i2}\right)}=\frac{\left(F_{r1}F_{r2}+F_{i1}F_{i2}\right)+j\left(F_{i1}F_{r2}-F_{r1}F_{i2}\right)}{F_{r2}{}^2+F_{i2}{}^2}$$

$$=\frac{F_{r1}F_{r2}+F_{i1}F_{i2}}{F_{r2}{}^2+F_{i2}{}^2}+j\frac{F_{i1}F_{r2}-F_{r1}F_{i2}}{F_{r2}{}^2+F_{i2}{}^2}$$

複素数の除算は **有理化** をする必要があり，非常に面倒

# 正弦波交流






**瞬時値**

$$i = I_m \sin(\omega t + \theta)\,[\mathrm{A}]$$

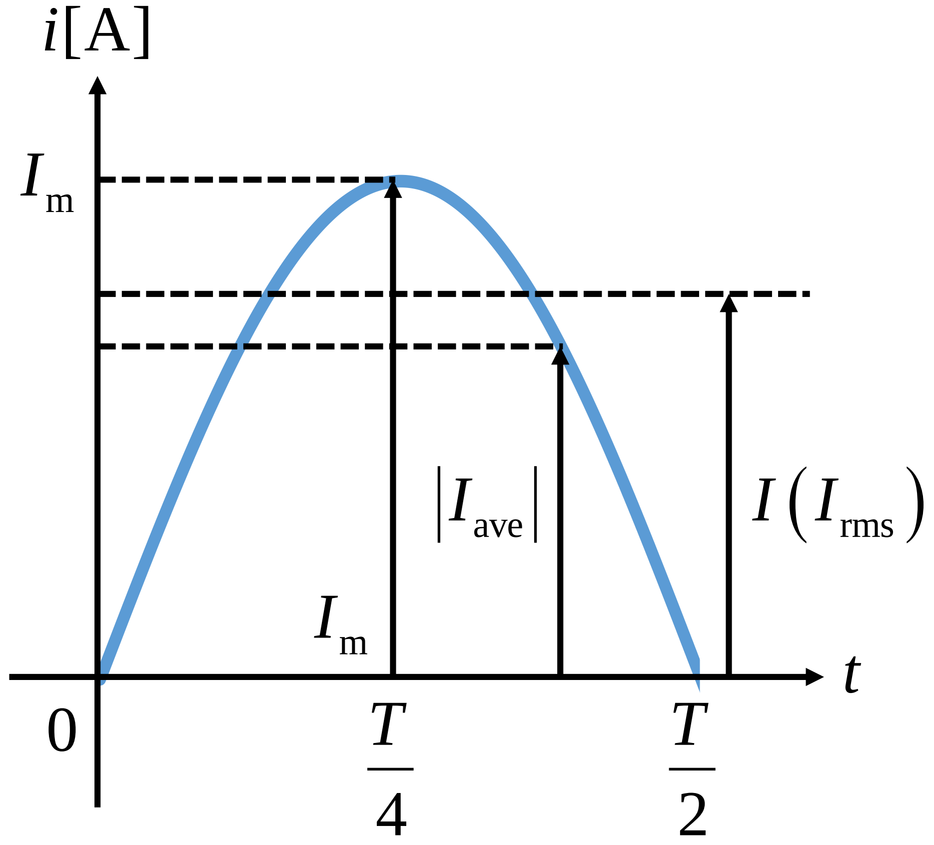
ある時間における **瞬間** の値

**周波数** $f = \dfrac{1}{T}$ [Hz]

- $I_m$ [A]：最大値（ **振幅** ）
- $\omega = 2\pi f$ [rad/s]：**角周波数**
- $\theta$ [rad] or [°] ([deg]) ：**位相角**

# 絶対平均値と実効値






正弦波の **半周期** 波形

## 絶対平均値

$$|I_\mathrm{ave}| = \frac{1}{T}\int_0^T |i|\,dt = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} I_\mathrm{m}\sin\omega t dt = \frac{2}{\pi}I_\mathrm{m}$$

正弦波交流の **平均値** は **ゼロ** になるため，
**絶対値** を用いる

## 実効値 (RMS : Root Mean Square)

$$I_\mathrm{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_\mathrm{m}{}^2 \sin^2(\omega t+\theta)\,dt} = \frac{I_\mathrm{m}}{\sqrt{2}}$$

実効値は **二乗平均平方根** とも呼ばれ，
電気回路において重要なパラメータである

※ **正弦波** の **絶対平均値** と **実効値** の計算はできるようにしておくこと！

# 例題



ある電圧 $v$ が，$v = 141.4\sin\left(314t + \frac{\pi}{8}\right)$[V] のように変化する．各値を求めよ．

$$v = 141.4\sin\left(314t + \frac{\pi}{8}\right)[\mathrm{V}] = V_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \theta)[\mathrm{V}]$$ より，

最大値（振幅）：$V_{\mathrm{m}} = 141.4[\mathrm{V}]$

実効値：$V_{\mathrm{rms}} = \dfrac{V_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{141.4}{\sqrt{2}} \approx 100[\mathrm{V}]$

絶対平均値：$|V_{\mathrm{ave}}| = \dfrac{2V_{\mathrm{m}}}{\pi} = \dfrac{2\times141.4}{3.14} \approx 90[\mathrm{V}]$

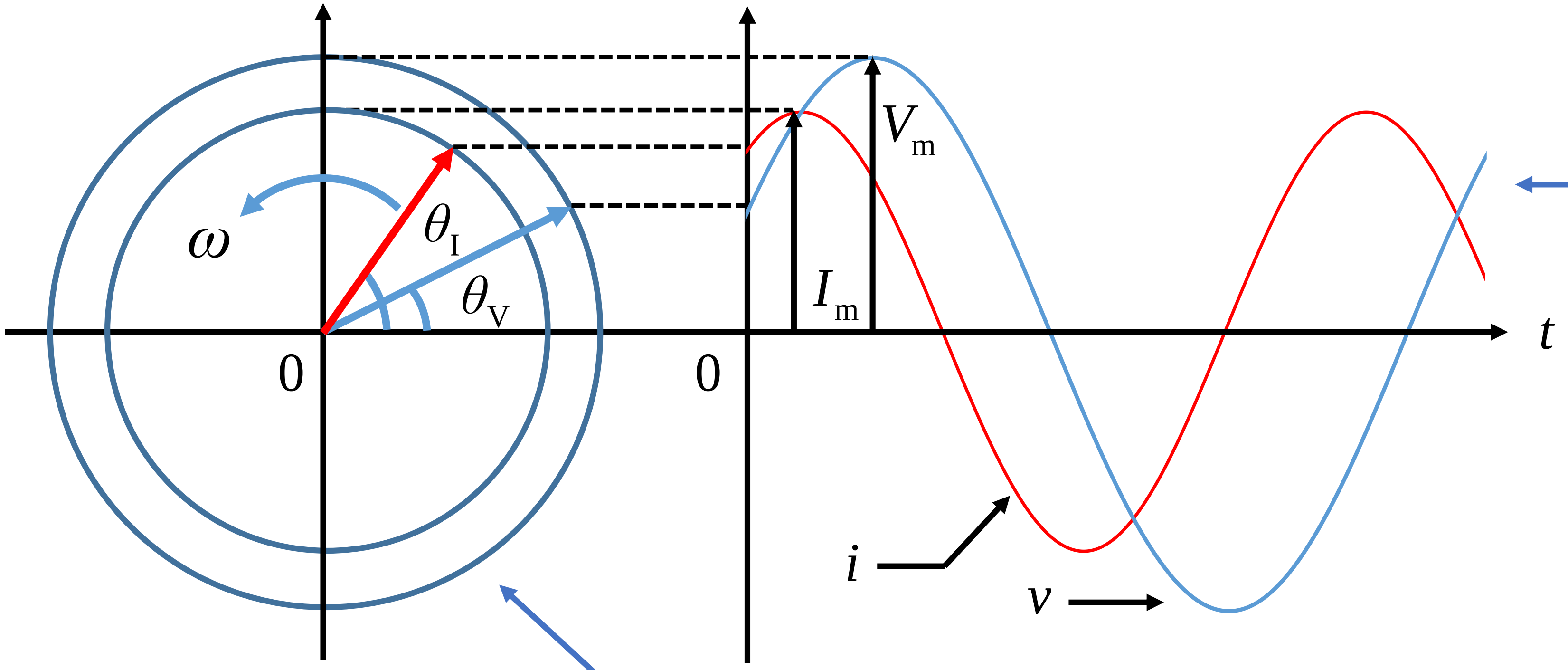
角周波数：$\omega = 314[\mathrm{rad/s}]$

周波数：$f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{314}{2\times3.14} = 50[\mathrm{Hz}]$

位相角：$\theta = \dfrac{\pi}{8}[\mathrm{rad}] = \dfrac{\pi\times\dfrac{180}{\pi}}{8} = 22.5[°]$

# 正弦波交流のフェーザ表示






**瞬時値** 表示

$$\begin{cases} v = V_m \sin(\omega t + \theta_V)\,[V] \\ i = I_m \sin(\omega t + \theta_I)\,[A] \end{cases}$$

**フェーザ** (phasor)表示

$$\begin{cases} \dot{V} = V_{rms}\angle\theta_V\,[V] = V\angle\theta_V\,[V] \\ \dot{I} = I_{rms}\angle\theta_I\,[A] = I\angle\theta_I\,[A] \end{cases}$$

**フェーザ** 表示を用いることで，**大きさ** と **位相** の成分を含んだまま正弦波交流を計算することが出来る！（※最大値の代わりに **実効値** を用いていることに注意）

phase vector（位相ベクトル）⇒ phasor

# 正弦波交流のフェーザ表示と複素数表示



**瞬時値** 表示

$$
\begin{cases}
v = 141.4\sin\left(100\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)[\mathrm{V}] = V_{\mathrm{m}}\sin\left(\omega t + \theta_{\mathrm{V}}\right)[\mathrm{V}] \\
i = 20\sin\left(100\pi t - \dfrac{\pi}{6}\right)[\mathrm{V}] = I_{\mathrm{m}}\sin\left(\omega t + \theta_{\mathrm{I}}\right)[\mathrm{V}]
\end{cases}
$$

**フェーザ** 表示

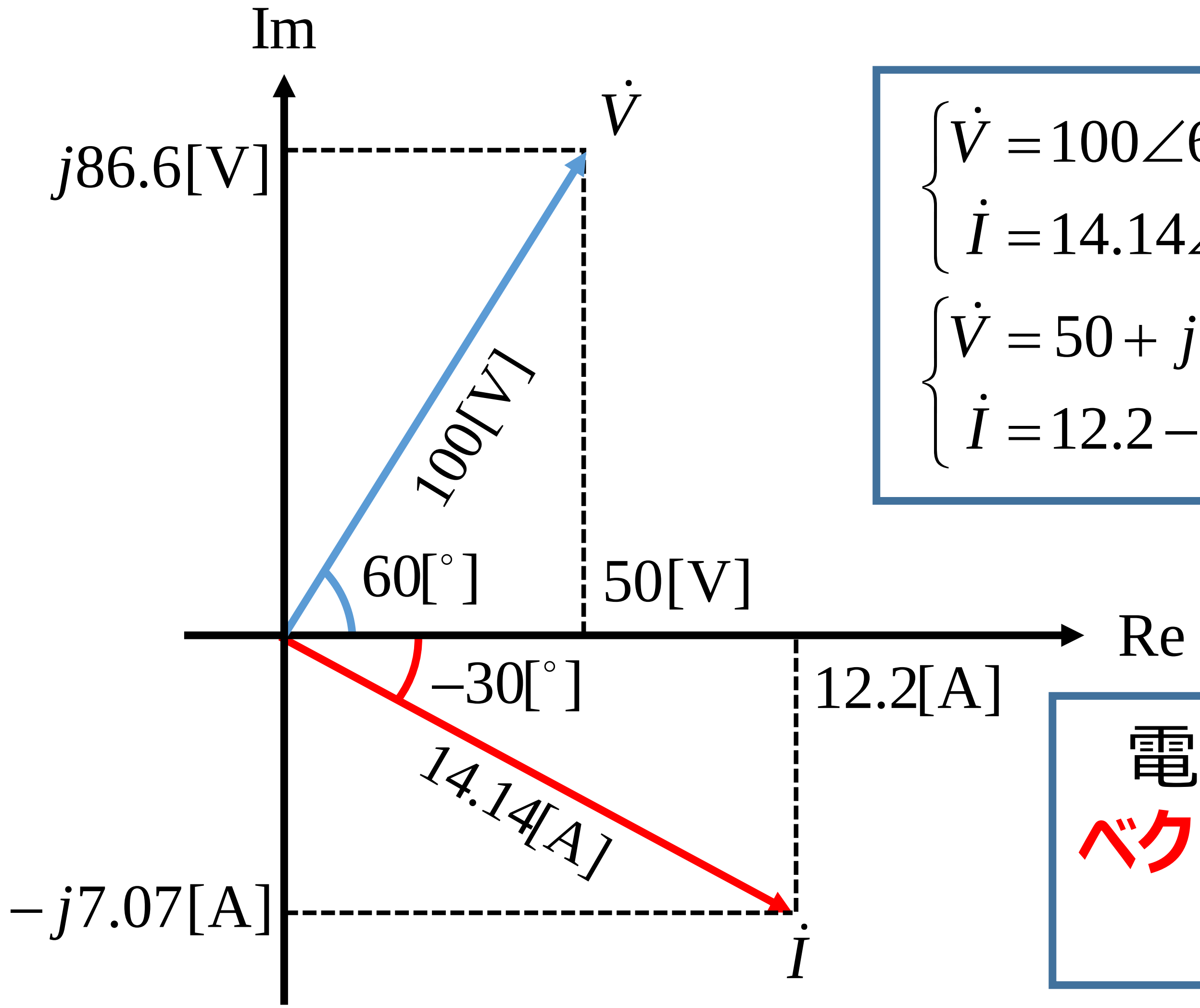
$$
\begin{cases}
\dot{V} = V\angle\theta_{\mathrm{V}} = \dfrac{V_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}\angle\theta_{\mathrm{V}} = \dfrac{141.4}{\sqrt{2}}\angle\dfrac{\pi}{3} = 100\angle 60^{\circ}[\mathrm{V}] \\
\dot{I} = I\angle\theta_{\mathrm{I}} = \dfrac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}\angle\theta_{\mathrm{I}} = \dfrac{20}{\sqrt{2}}\angle -\dfrac{\pi}{6} = 14.14\angle -30^{\circ}[\mathrm{A}]
\end{cases}
$$

**複素数** 表示

$$
\begin{cases}
\dot{V} = V\cos\theta_{\mathrm{V}} + jV\sin\theta_{\mathrm{V}} = 100\cos\dfrac{\pi}{3} + j100\sin\dfrac{\pi}{3} = 50 + j86.6[\mathrm{V}] \\
\dot{I} = I\cos\theta_{\mathrm{I}} + jI\sin\theta_{\mathrm{I}} = 14.14\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + j14.14\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = 12.2 - j7.07[\mathrm{A}]
\end{cases}
$$

# 正弦波交流のフェーザ図






$$\begin{cases} \dot{V} = 100\angle 60^\circ [\mathrm{V}] \\ \dot{I} = 14.14\angle -30^\circ [\mathrm{A}] \end{cases}$$

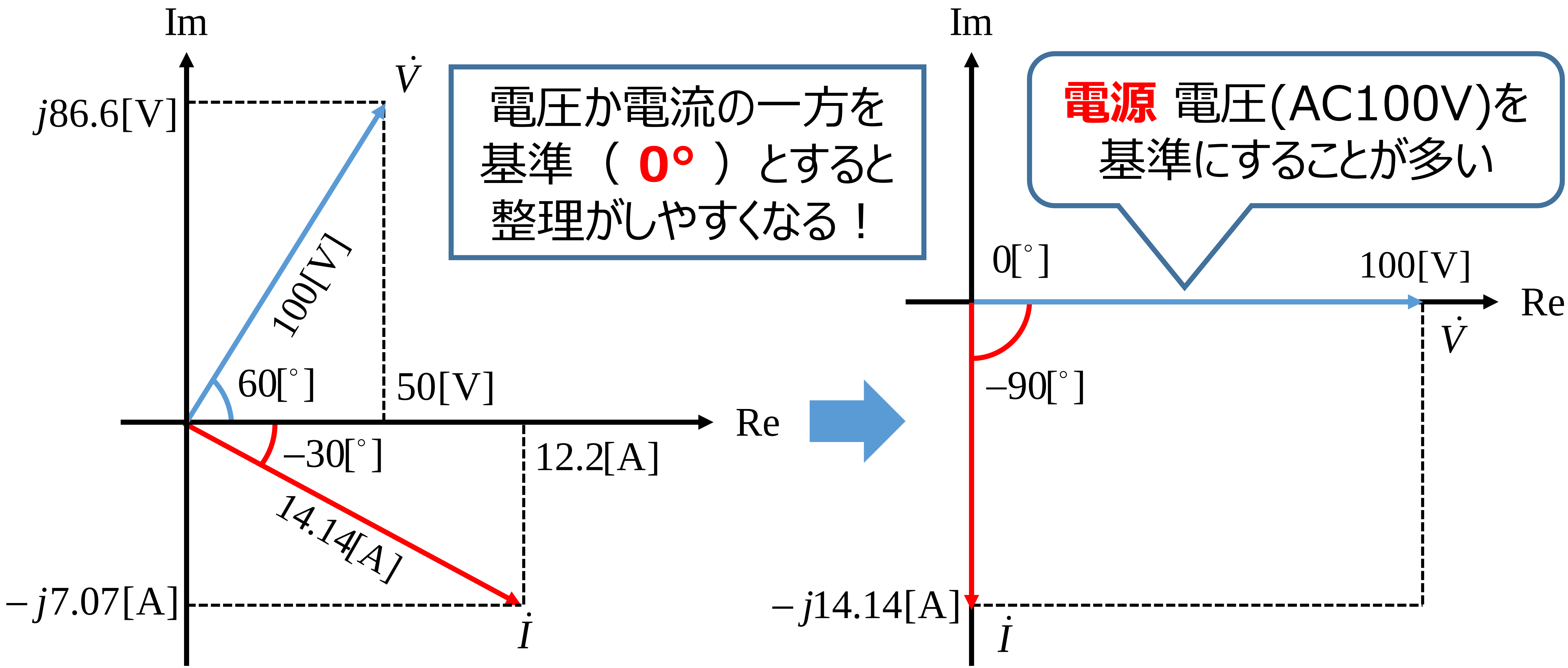
$$\begin{cases} \dot{V} = 50 + j86.6 [\mathrm{V}] \\ \dot{I} = 12.2 - j7.07 [\mathrm{A}] \end{cases}$$

同じ単位のものに
関しては **ベクトル** の
**大きさ** を揃えて
フェーザ図を描く！

電流と電圧では単位が **異なる** ため，
**ベクトル** の **大きさ** は揃える必要は無いが
**位相** は揃えなければならない！

# 電圧を基準とした場合の正弦波交流のフェーザ図

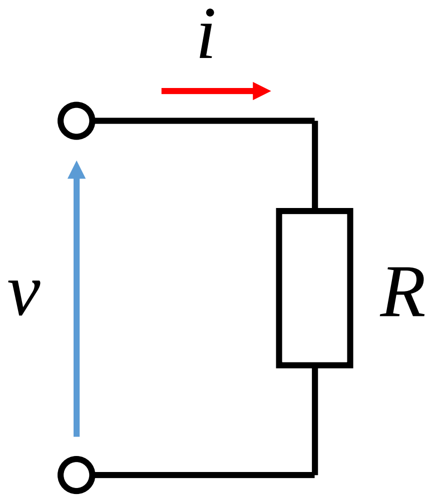




# 抵抗 (Resistance)



$R$, $i$, $v$ の関係は，$v = Ri$　（交流回路における **オーム** の法則）

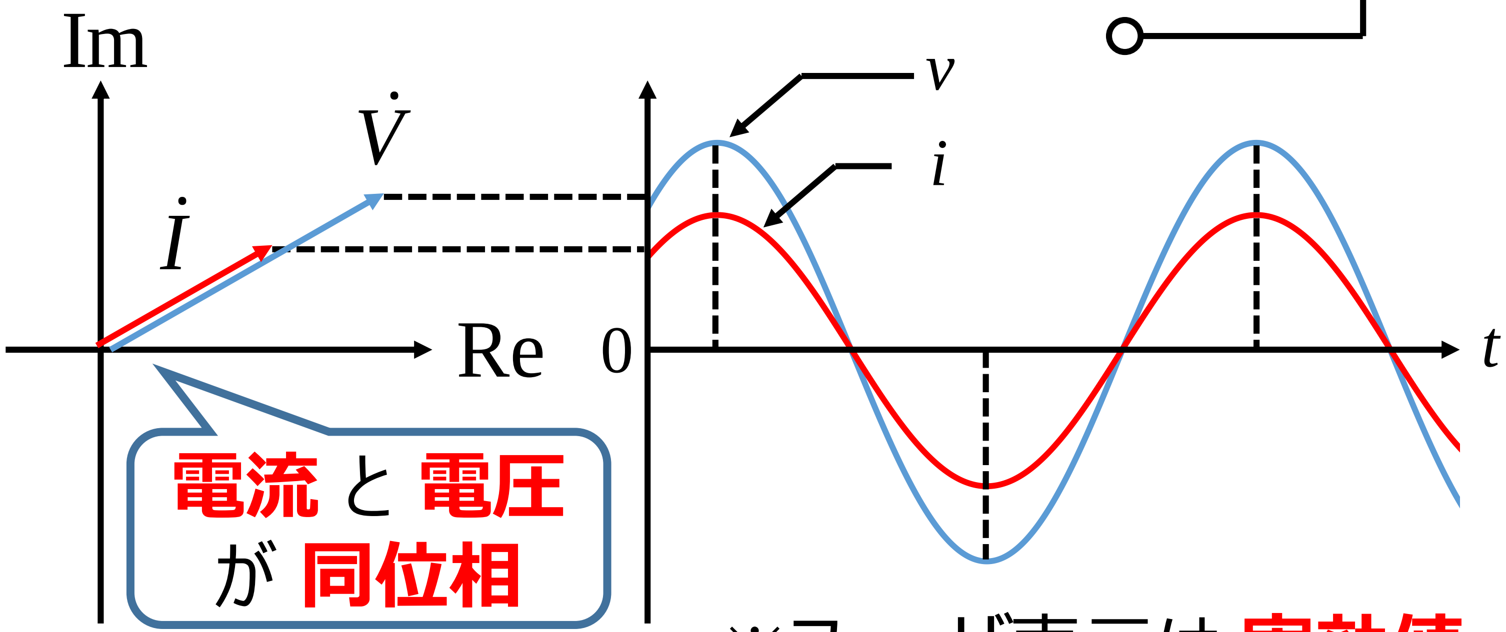



**オーム** の法則より，電流と電圧の大きさは抵抗に **比例** するが，位相には変化が **無い** ため，電流を **フェーザ** 表示で表すと，

$$\begin{cases} \dot{I} = I\angle\theta_{\mathrm{I}} \\ \dot{V} = RI\angle\theta_{\mathrm{I}} \equiv V\angle\theta_{\mathrm{V}} \end{cases}$$

よって，一般的に

$$\boxed{\dot{V} = R\dot{I}\,[\mathrm{V}] \qquad \dot{I} = \frac{\dot{V}}{R}\,[\mathrm{A}]}$$

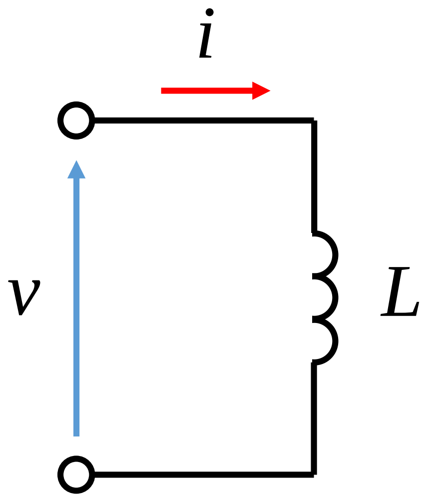



※フェーザ表示は **実効値**

# インダクタンス (Inductance)



$L$, $i$, $v$ の関係は，$v = L\dfrac{di}{dt}$　（ファラデーの **電磁誘導** の法則）



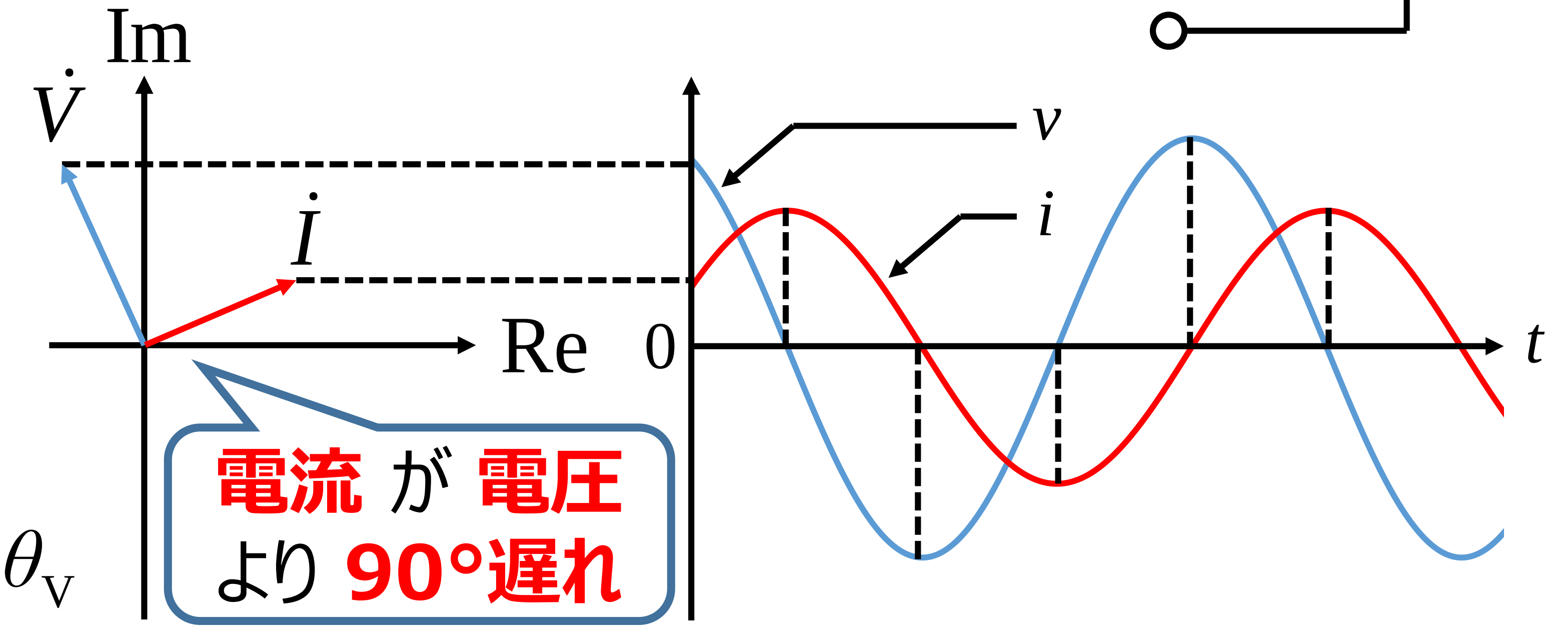

ここで，正弦波電流 $i = I_{\mathrm{m}}\sin\left(\omega t+\theta_{\mathrm{I}}\right)$ を **微分** すると，

$$v = L\frac{d}{dt}I_{\mathrm{m}}\sin\left(\omega t+\theta_{\mathrm{I}}\right) = \omega L I_{\mathrm{m}}\cos\left(\omega t+\theta_{\mathrm{I}}\right)$$

$$= \omega L I_{\mathrm{m}}\sin\left(\omega t+\theta_{\mathrm{I}}+\frac{\pi}{2}\right)$$

よって，フェーザ表示は

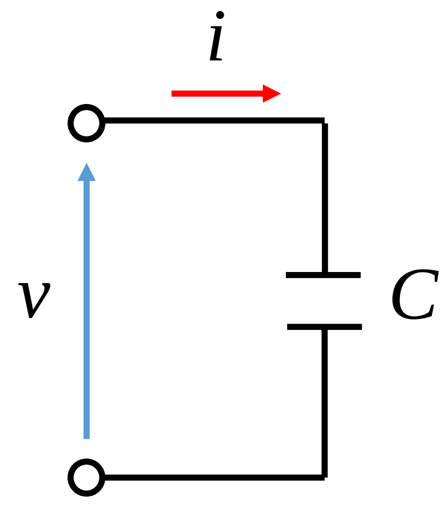
$$\begin{cases} \dot{I} = I\angle\theta_{\mathrm{I}} \\ \dot{V} = \omega L I\angle\left(\theta_{\mathrm{I}}+90^{\circ}\right) \equiv V\angle\theta_{\mathrm{V}} \end{cases}$$



# キャパシタンス (Capacitance)



$C, i, v$ の関係は， $v = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i\,dt$ ➡ $i = C\dfrac{dv}{dt}$



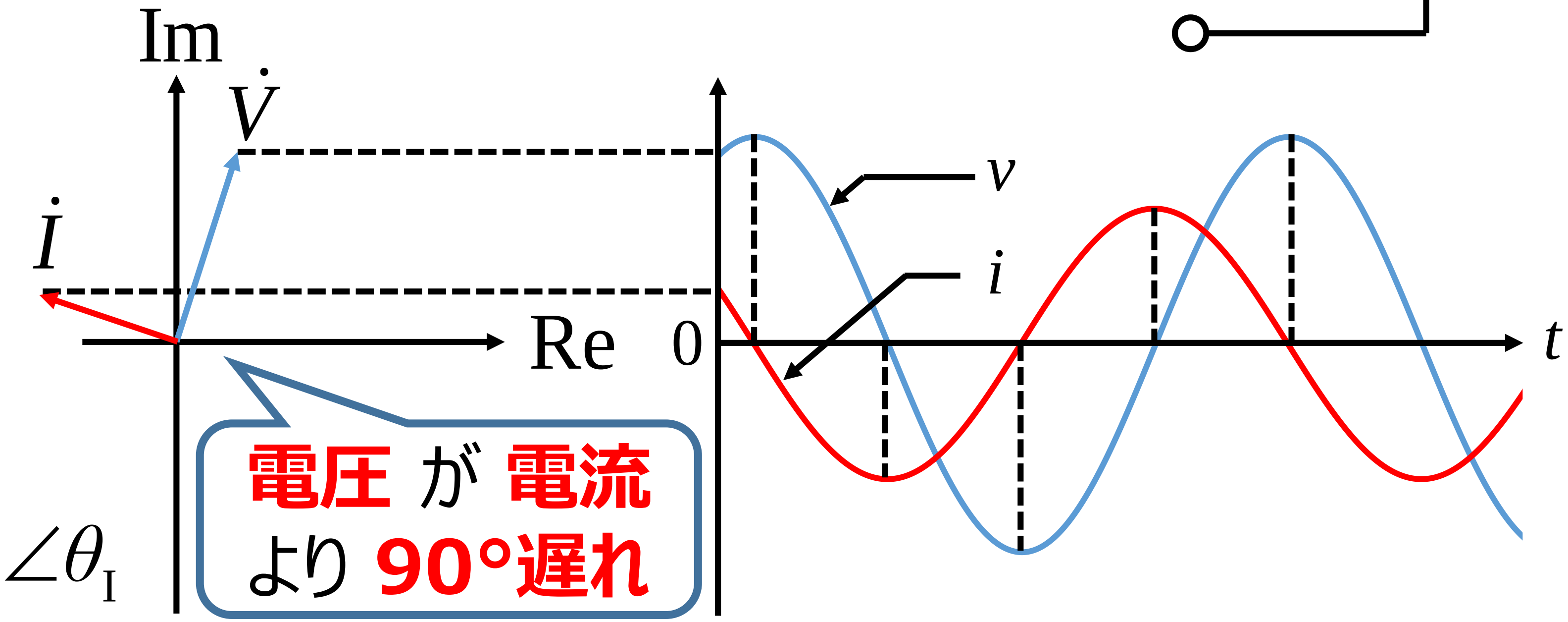

$i$ と $v$ の関係が **インダクタンス** と **逆** になっているので，同様に

$$i = C\frac{d}{dt}V_\mathrm{m}\sin\left(\omega t + \theta_\mathrm{V}\right) = \omega C V_\mathrm{m}\cos\left(\omega t + \theta_\mathrm{V}\right)$$

$$= \omega C V_\mathrm{m}\sin\left(\omega t + \theta_\mathrm{V} + \frac{\pi}{2}\right)$$

よって，フェーザ表示は

$$\begin{cases} \dot{V} = V\angle\theta_\mathrm{V} \\ \dot{I} = \omega C V\angle\left(\theta_\mathrm{V} + 90^\circ\right) \equiv I\angle\theta_\mathrm{I} \end{cases}$$

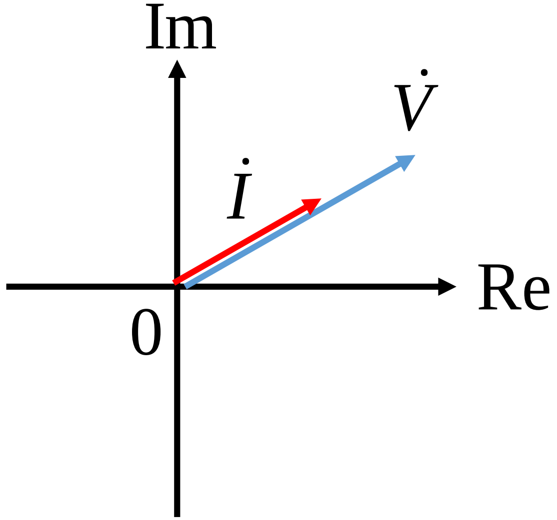


# 回路要素のまとめ



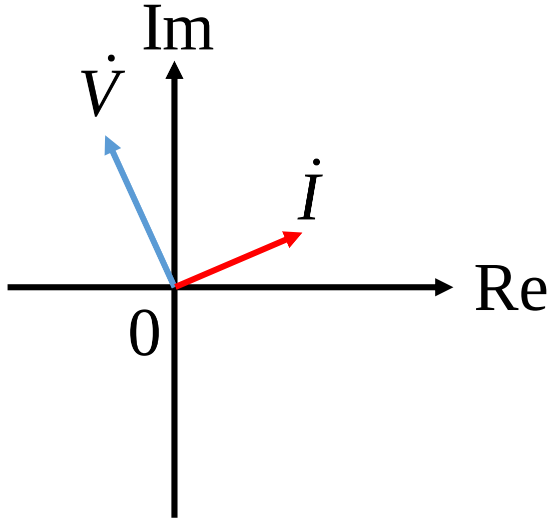
**抵抗：$R$**

$$\begin{cases} \dot{V} = R\dot{I}\,[\mathrm{V}] \\ \dot{I} = \dfrac{\dot{V}}{R}\,[\mathrm{A}] \end{cases}$$




**インダクタンス：$L$**

$$\begin{cases} \dot{V} = j\omega L\dot{I}\,[\mathrm{V}] \\ \dot{I} = \dfrac{\dot{V}}{j\omega L} = -j\dfrac{1}{\omega L}\dot{V}\,[\mathrm{A}] \end{cases}$$




**キャパシタンス：$C$**

$$\begin{cases} \dot{V} = \dfrac{\dot{V}}{j\omega C} = -j\dfrac{1}{\omega L}\dot{V}\,[\mathrm{V}] \\ \dot{I} = j\omega C\dot{V}\,[\mathrm{A}] \end{cases}$$