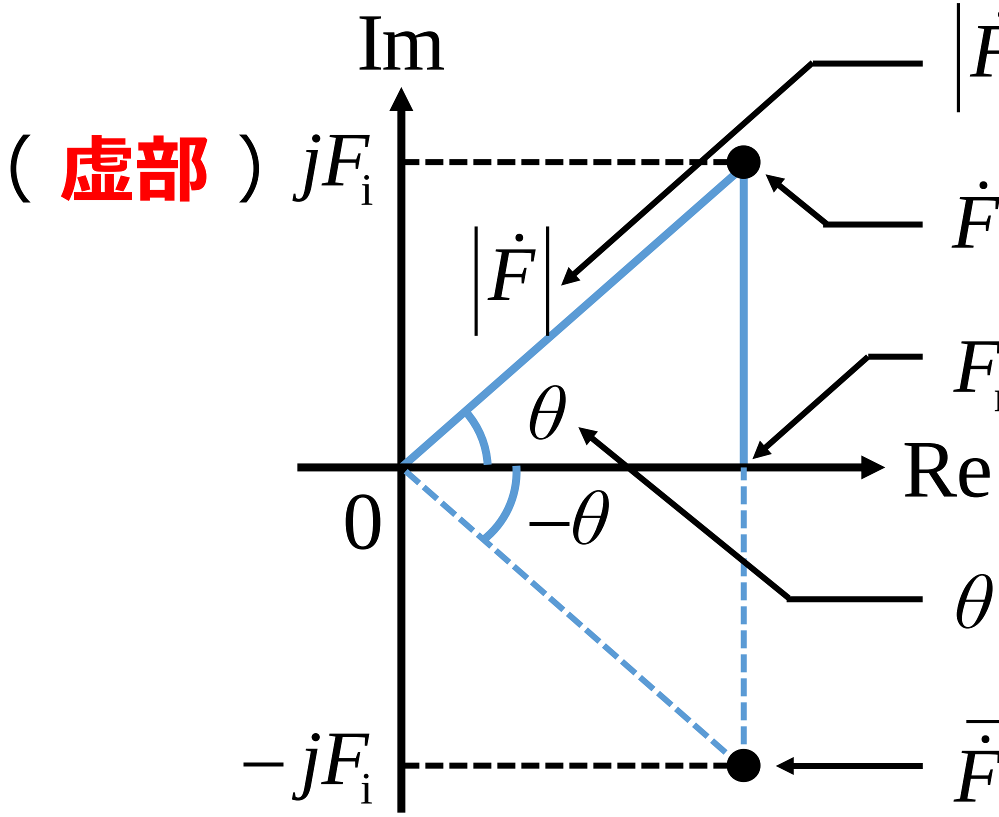
8. 交流回路の基本及び各種回路要素
8. Fundamental of the AC Electric Circuit and Various Circuit Elements

講義内容

1. 交流回路計算の基本
2. フェーザ表示と複素数表示
3. 回路要素：R, L, C

複素数の復習

横軸が実数，縦軸が虚数の平面上の1点を **複素数** という
（※平面の名前：**複素** 平面，**ガウス** 平面）



$$\left|\dot{F}\right| = \sqrt{F_r^{\,2} + F_i^{\,2}}$$ （ **大きさ** ）

$$\dot{F} = F_r + jF_i$$ （ 複素数 ）

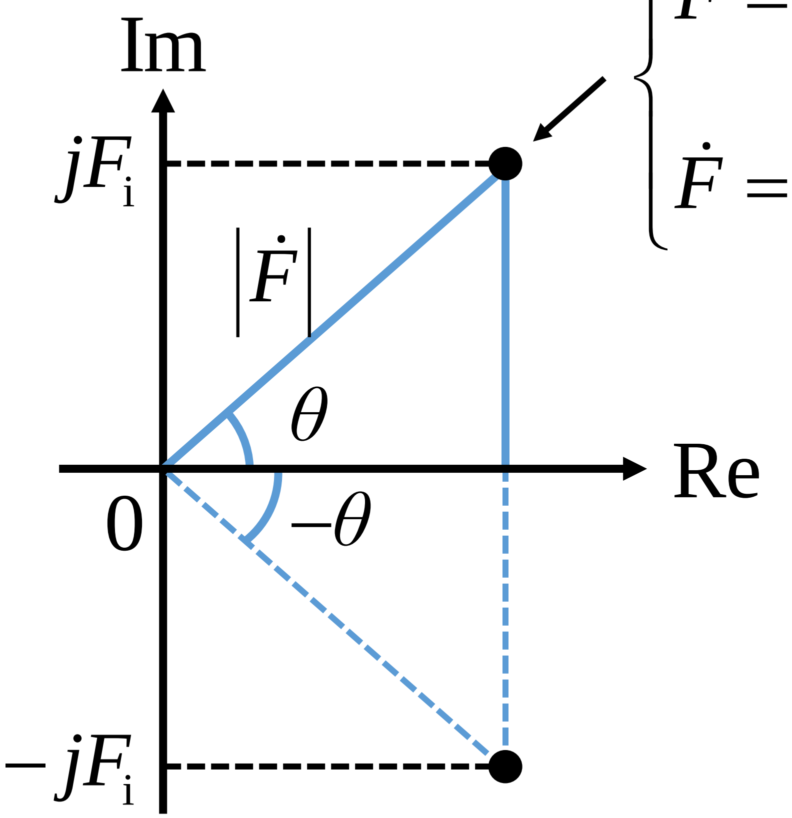
F_r （ **実部** ）

$$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{F_i}{F_r}$$ （ **位相** ）

$$\bar{\dot{F}} = F_r - jF_i$$ （ **共役** 複素数 ）

Carolus Fridericus Gauss (1777～1855)

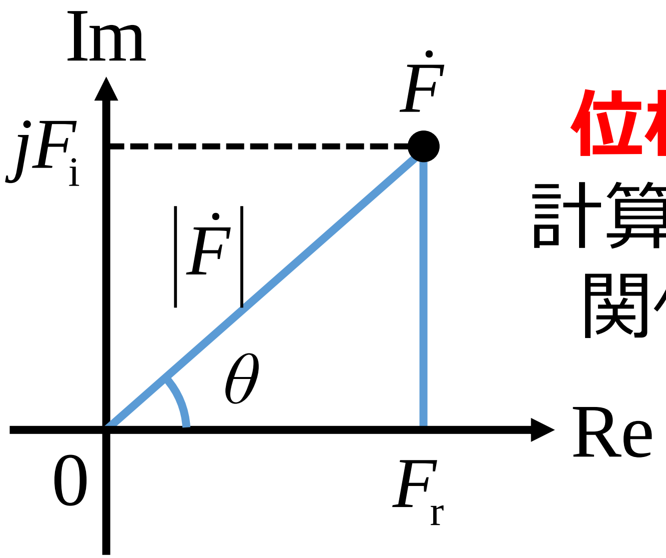
複素数表示と極表示（フェーザ表示）



$$\begin{cases} \dot{F} = F_r + jF_i = \sqrt{F_r^{\,2} + F_i^{\,2}} \angle \mathrm{Tan}^{-1} \dfrac{F_i}{F_r} \equiv |\dot{F}| \angle \theta \\ \dot{F} = |\dot{F}| \angle \theta = |\dot{F}| \cos\theta + j|\dot{F}| \sin\theta \equiv F_r + jF_i \end{cases}$$

複素数 ⇒ 極

極 ⇒ 複素数



位相（**位相角**）θを電卓で計算する場合，**象限**と**符号**の関係を把握する必要がある！

※第 **1** 象限はそのまま！

複素数の計算

$$\dot{F}_1 = F_{r1} + jF_{i1} = \left|\dot{F}_1\right|\angle\theta_1 \quad , \quad \dot{F}_2 = F_{r2} + jF_{i2} = \left|\dot{F}_2\right|\angle\theta_2$$

加算（+） $\dot{F}_1 + \dot{F}_2 = \left(F_{r1} + jF_{i1}\right) + \left(F_{r2} + jF_{i2}\right) = \left(F_{r1} + F_{r2}\right) + j\left(F_{i1} + F_{i2}\right)$

減算（−） $\dot{F}_1 - \dot{F}_2 = \left(F_{r1} + jF_{i1}\right) - \left(F_{r2} + jF_{i2}\right) = \left(F_{r1} - F_{r2}\right) + j\left(F_{i1} - F_{i2}\right)$

乗算（×） $\dot{F}_1\dot{F}_2 = \left|\dot{F}_1\right|\angle\theta_1 \times \left|\dot{F}_2\right|\angle\theta_2 = \left|\dot{F}_1\right|\left|\dot{F}_2\right|\angle\left(\theta_1 + \theta_2\right)$

位相角は **和**

除算（÷） $\dfrac{\dot{F}_1}{\dot{F}_2} = \dfrac{\left|\dot{F}_1\right|\angle\theta_1}{\left|\dot{F}_2\right|\angle\theta_2} = \dfrac{\left|\dot{F}_1\right|}{\left|\dot{F}_2\right|}\angle\left(\theta_1 - \theta_2\right)$

位相角は **差**

加･減算：**複素数** 表示
乗･除算：**極** 表示
で計算を行う方が簡単

複素数計算の注意点

加・減算
$$\begin{cases}\dot{F}_1+\dot{F}_2=\left(F_{\mathrm{r1}}+F_{\mathrm{r2}}\right)+j\left(F_{\mathrm{i1}}+F_{\mathrm{i2}}\right)\\ \dot{F}_1-\dot{F}_2=\left(F_{\mathrm{r1}}-F_{\mathrm{r2}}\right)+j\left(F_{\mathrm{i1}}-F_{\mathrm{i2}}\right)\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases}\dot{F}_1+\dot{F}_2=\left|\dot{F}_1\right|+\left|\dot{F}_2\right|\angle\left(\theta_1+\theta_2\right)\\ \dot{F}_1-\dot{F}_2=\left|\dot{F}_1\right|-\left|\dot{F}_2\right|\angle\left(\theta_1-\theta_2\right)\end{cases}}$$

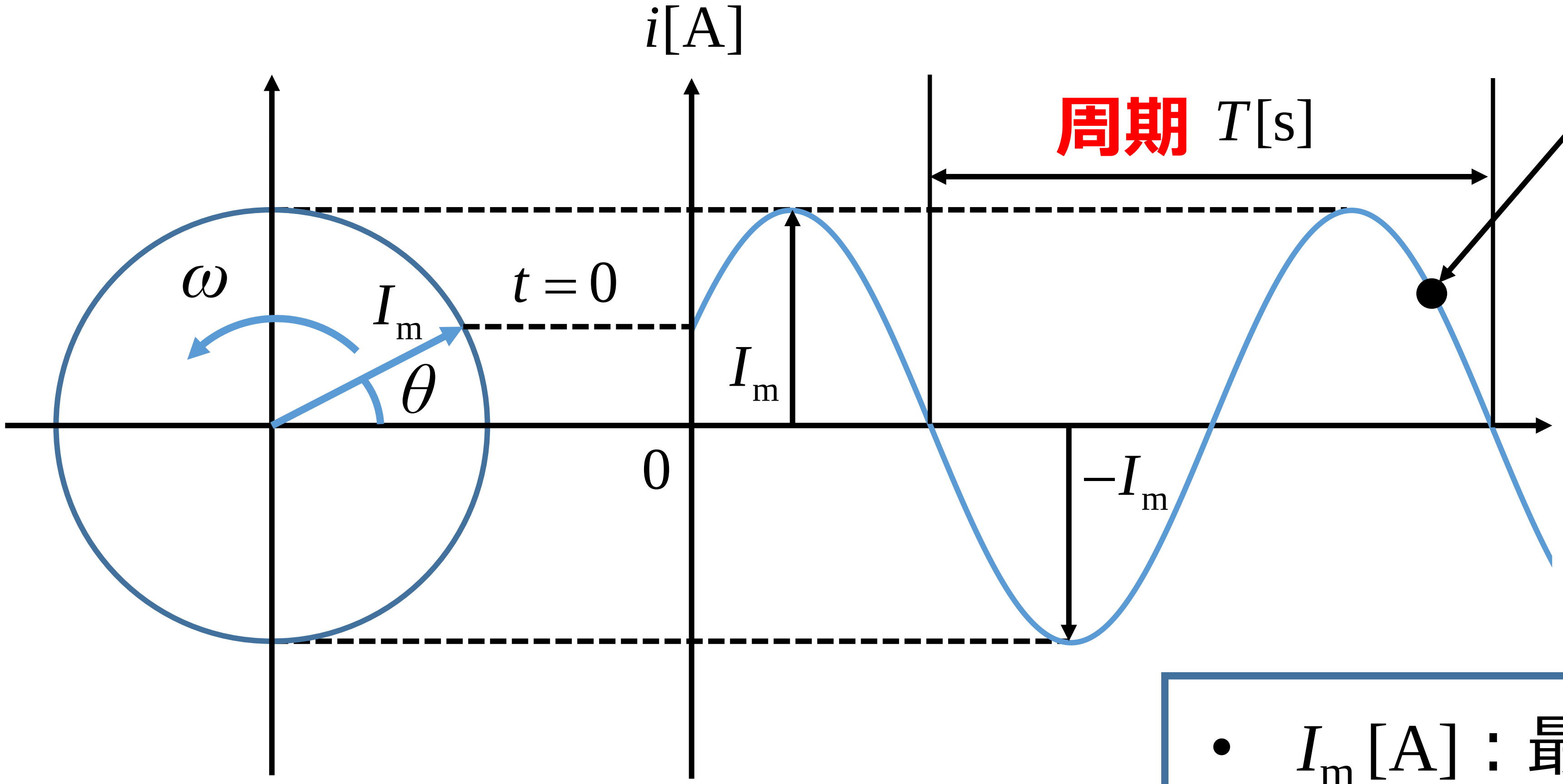
右の計算式は **間違い** ！極表示は **加・減算** の計算はできないことに注意！

乗算
$$\dot{F}_1\dot{F}_2=\left(F_{\mathrm{r1}}+jF_{\mathrm{i1}}\right)\left(F_{\mathrm{r2}}+jF_{\mathrm{i2}}\right)=\left(\underline{F_{\mathrm{r1}}F_{\mathrm{r2}}-F_{\mathrm{i1}}F_{\mathrm{i2}}}\right)+j\left(\underline{F_{\mathrm{r1}}F_{\mathrm{i2}}+F_{\mathrm{i1}}F_{\mathrm{r2}}}\right)$$

除算
$$\frac{\dot{F}_1}{\dot{F}_2}=\frac{F_{\mathrm{r1}}+jF_{\mathrm{i1}}}{F_{\mathrm{r2}}+jF_{\mathrm{i2}}}=\frac{\left(F_{\mathrm{r1}}+jF_{\mathrm{i1}}\right)\left(F_{\mathrm{r2}}-jF_{\mathrm{i2}}\right)}{\left(F_{\mathrm{r2}}+jF_{\mathrm{i2}}\right)\left(F_{\mathrm{r2}}-jF_{\mathrm{i2}}\right)}=\frac{\left(F_{\mathrm{r1}}F_{\mathrm{r2}}+F_{\mathrm{i1}}F_{\mathrm{i2}}\right)+j\left(F_{\mathrm{i1}}F_{\mathrm{r2}}-F_{\mathrm{r1}}F_{\mathrm{i2}}\right)}{{F_{\mathrm{r2}}}^2+{F_{\mathrm{i2}}}^2}$$
$$=\frac{F_{\mathrm{r1}}F_{\mathrm{r2}}+F_{\mathrm{i1}}F_{\mathrm{i2}}}{{F_{\mathrm{r2}}}^2+{F_{\mathrm{i2}}}^2}+j\frac{F_{\mathrm{i1}}F_{\mathrm{r2}}-F_{\mathrm{r1}}F_{\mathrm{i2}}}{{F_{\mathrm{r2}}}^2+{F_{\mathrm{i2}}}^2}$$

複素数の除算は **有理化** をする
必要があり，非常に面倒

正弦波交流



瞬時値

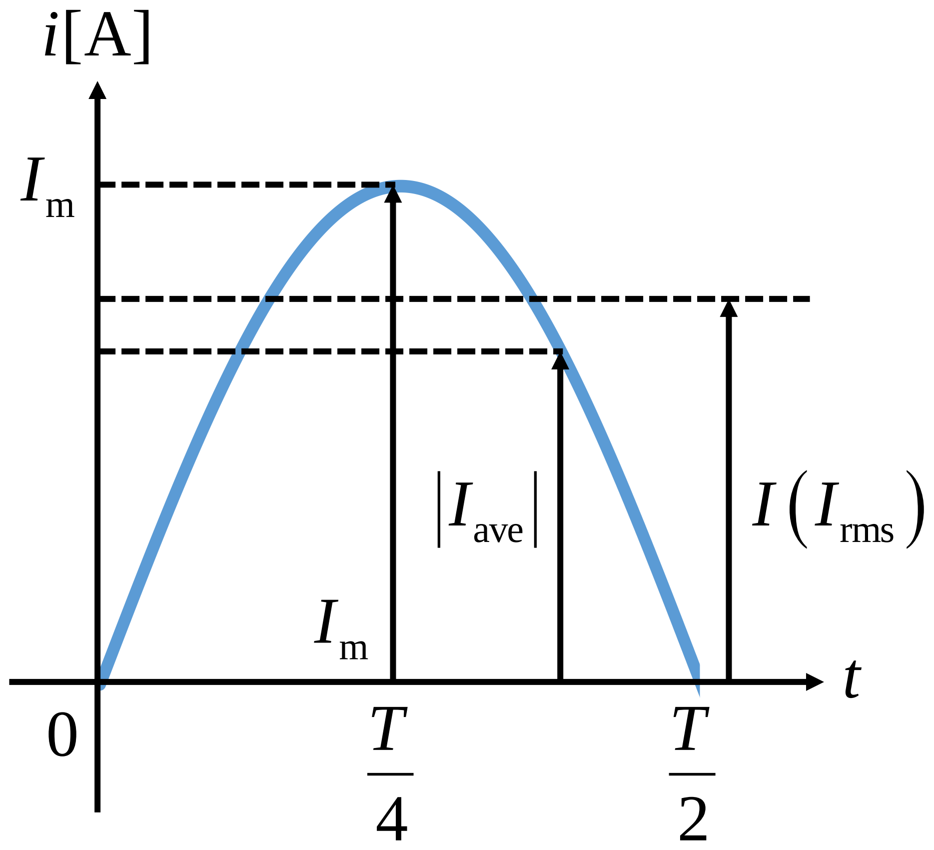
$i = I_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \theta)$ [A]

ある時間における **瞬間** の値

周波数 $f = \dfrac{1}{T}$ [Hz]

- I_{m} [A]：最大値（ **振幅** ）
- $\omega = 2\pi f$ [rad/s]：**角周波数**
- θ [rad] or [°] ([deg]) ：**位相角**

絶対平均値と実効値



正弦波の **半周期** 波形

絶対平均値

$$\left|I_{\mathrm{ave}}\right| = \frac{1}{T}\int_0^T |i|\,dt = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} I_{\mathrm{m}} \sin\omega t dt = \frac{2}{\pi} I_{\mathrm{m}}$$

正弦波交流の **平均値** は **ゼロ** になるため，**絶対値** を用いる

実効値 (RMS : Root Mean Square)

$$I_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_{\mathrm{m}}{}^2 \sin^2(\omega t + \theta) dt} = \frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}$$

実効値は **二乗平均平方根** とも呼ばれ，電気回路において重要なパラメータである

※ **正弦波** の **絶対平均値** と **実効値** の計算はできるようにしておくこと！

例題

ある電圧 v が， $v = 141.4\sin\left(314t + \dfrac{\pi}{8}\right)[\mathrm{V}]$ のように変化する． 各値を求めよ．

$$v = 141.4\sin\left(314t + \frac{\pi}{8}\right)[\mathrm{V}] = V_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \theta)[\mathrm{V}]$$ より，

最大値（振幅）： $V_{\mathrm{m}} = 141.4[\mathrm{V}]$

実効値： $V_{\mathrm{rms}} = \dfrac{V_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{141.4}{\sqrt{2}} \approx 100[\mathrm{V}]$

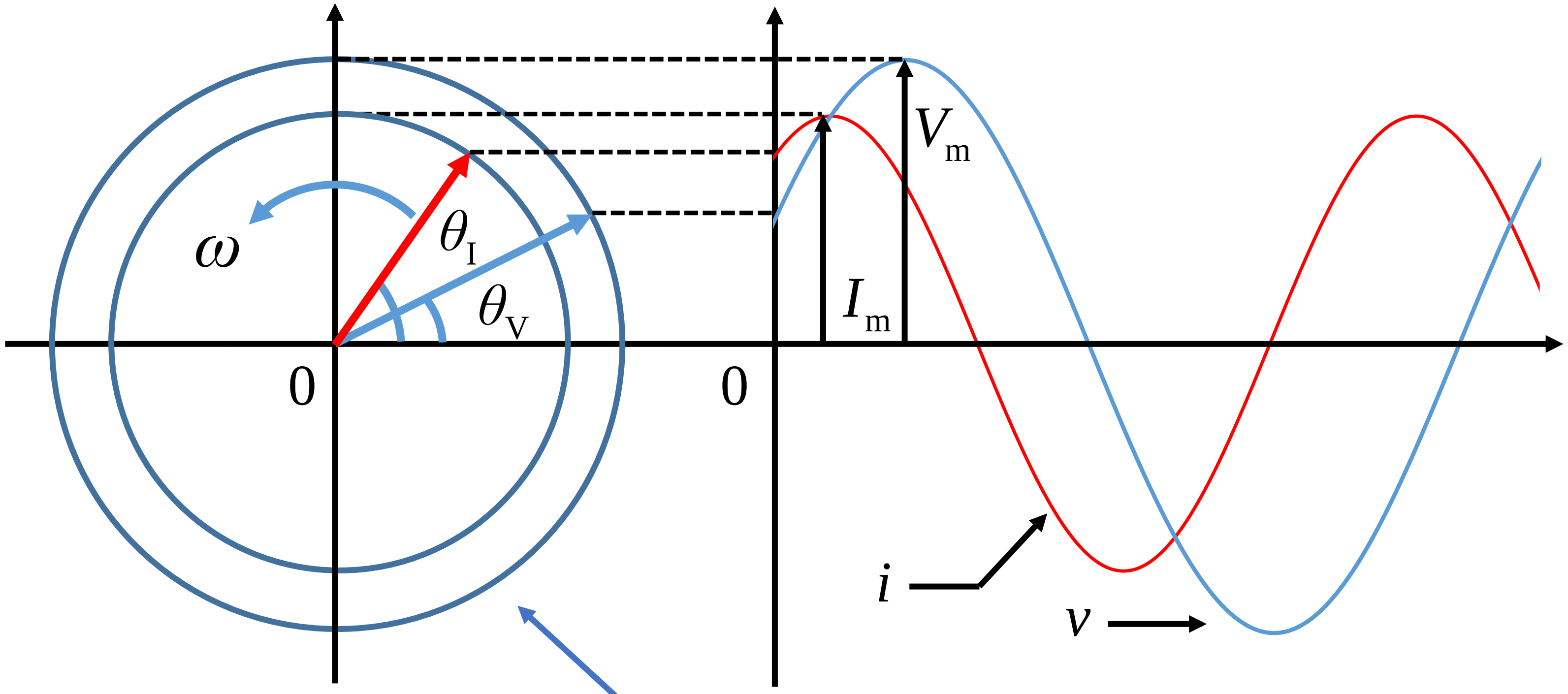
絶対平均値： $|V_{\mathrm{ave}}| = \dfrac{2V_{\mathrm{m}}}{\pi} = \dfrac{2\times 141.4}{3.14} \approx 90[\mathrm{V}]$

角周波数： $\omega = 314[\mathrm{rad/s}]$

周波数： $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{314}{2\times 3.14} = 50[\mathrm{Hz}]$

位相角： $\theta = \dfrac{\pi}{8}[\mathrm{rad}] = \dfrac{\pi\times\dfrac{180}{\pi}}{8} = 22.5[^\circ]$

正弦波交流のフェーザ表示



瞬時値 表示

$$\begin{cases} v = V_{\mathrm{m}} \sin\left(\omega t + \theta_{\mathrm{V}}\right) [\mathrm{V}] \\ i = I_{\mathrm{m}} \sin\left(\omega t + \theta_{\mathrm{I}}\right) [\mathrm{A}] \end{cases}$$

フェーザ (phasor)表示

$$\begin{cases} \dot{V} = V_{\mathrm{rms}} \angle \theta_{\mathrm{V}} [\mathrm{V}] = V \angle \theta_{\mathrm{V}} [\mathrm{V}] \\ \dot{I} = I_{\mathrm{rms}} \angle \theta_{\mathrm{I}} [\mathrm{A}] = I \angle \theta_{\mathrm{I}} [\mathrm{A}] \end{cases}$$

フェーザ 表示を用いることで，**大きさ** と **位相** の成分を含んだまま正弦波交流を計算することが出来る！（※最大値の代わりに **実効値** を用いていることに注意）

phase vector（位相ベクトル）⇒ phasor

正弦波交流のフェーザ表示と複素数表示

瞬時値 表示

$$\begin{cases} v = 141.4\sin\left(100\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)[\mathrm{V}] = V_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \theta_{\mathrm{V}})[\mathrm{V}] \\ i = 20\sin\left(100\pi t - \dfrac{\pi}{6}\right)[\mathrm{V}] = I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \theta_{\mathrm{I}})[\mathrm{V}] \end{cases}$$

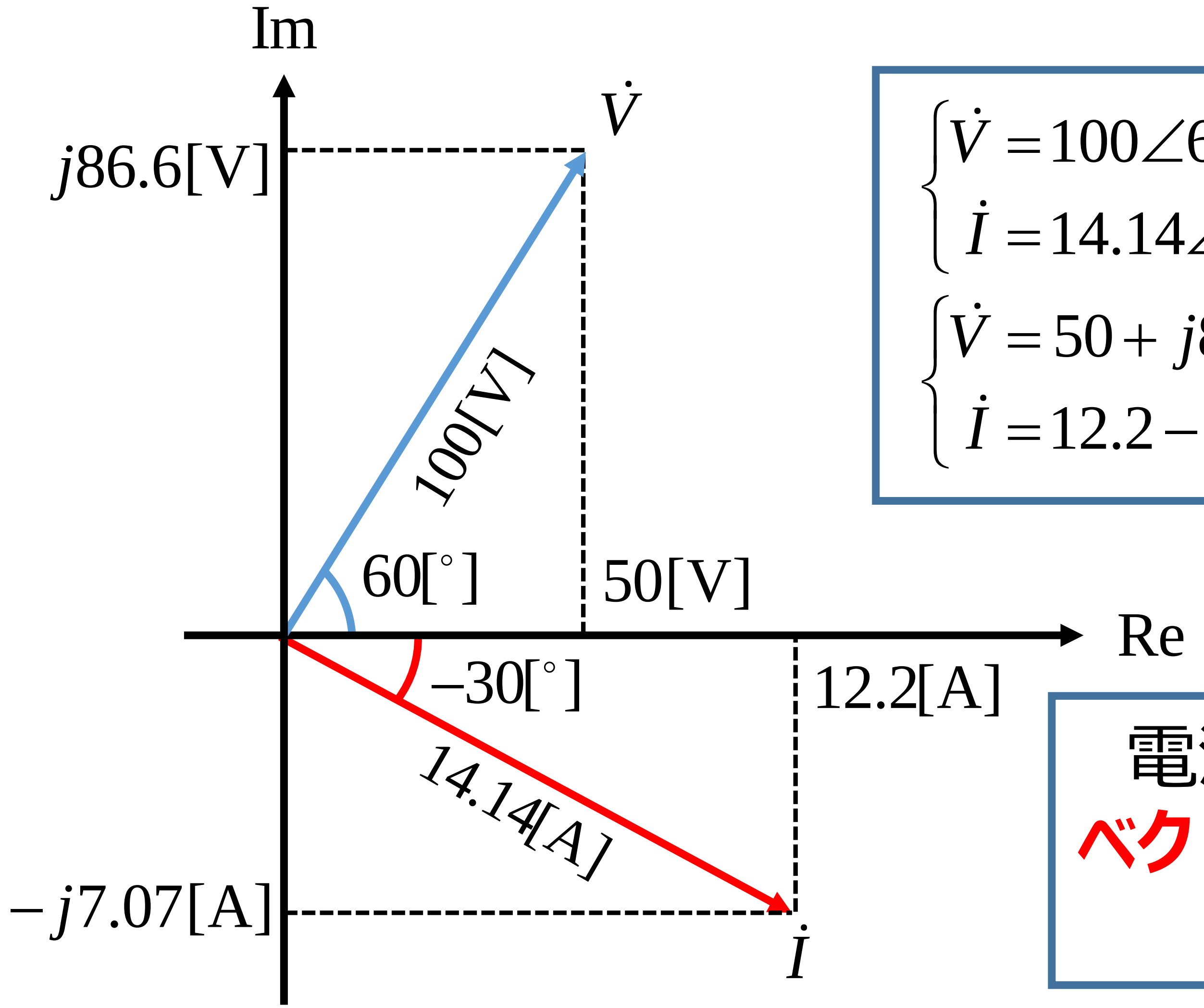
フェーザ 表示

$$\begin{cases} \dot{V} = V\angle\theta_{\mathrm{V}} = \dfrac{V_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}\angle\theta_{\mathrm{V}} = \dfrac{141.4}{\sqrt{2}}\angle\dfrac{\pi}{3} = 100\angle 60^{\circ}[\mathrm{V}] \\ \dot{I} = I\angle\theta_{\mathrm{I}} = \dfrac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}\angle\theta_{\mathrm{I}} = \dfrac{20}{\sqrt{2}}\angle-\dfrac{\pi}{6} = 14.14\angle-30^{\circ}[\mathrm{A}] \end{cases}$$

複素数 表示

$$\begin{cases} \dot{V} = V\cos\theta_{\mathrm{V}} + jV\sin\theta_{\mathrm{V}} = 100\cos\dfrac{\pi}{3} + j100\sin\dfrac{\pi}{3} = 50 + j86.6[\mathrm{V}] \\ \dot{I} = I\cos\theta_{\mathrm{I}} + jI\sin\theta_{\mathrm{I}} = 14.14\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + j14.14\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = 12.2 - j7.07[\mathrm{A}] \end{cases}$$

正弦波交流のフェーザ図



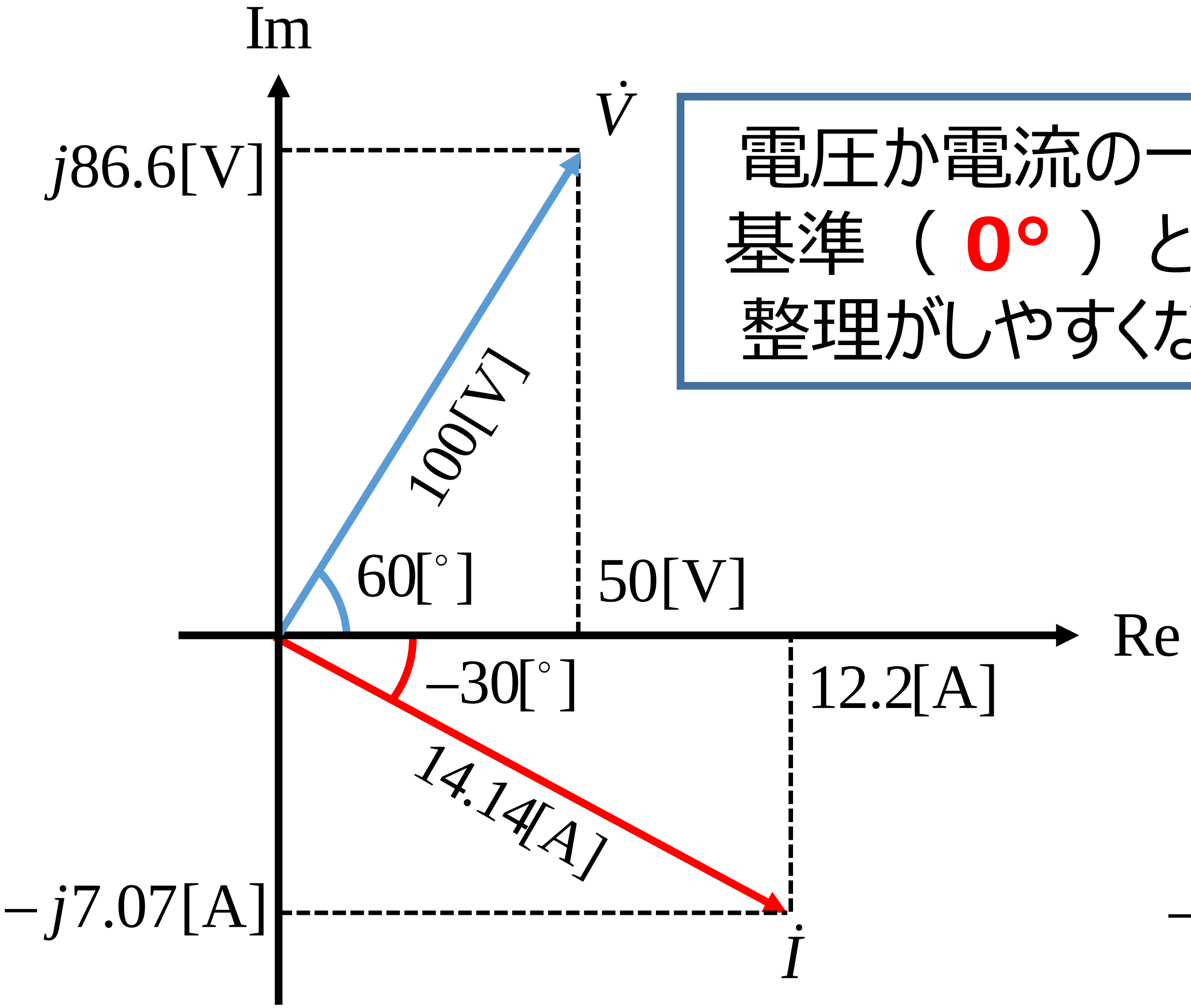
$$\begin{cases} \dot{V} = 100\angle 60^\circ[\mathrm{V}] \\ \dot{I} = 14.14\angle -30^\circ[\mathrm{A}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{V} = 50 + j86.6[\mathrm{V}] \\ \dot{I} = 12.2 - j7.07[\mathrm{A}] \end{cases}$$

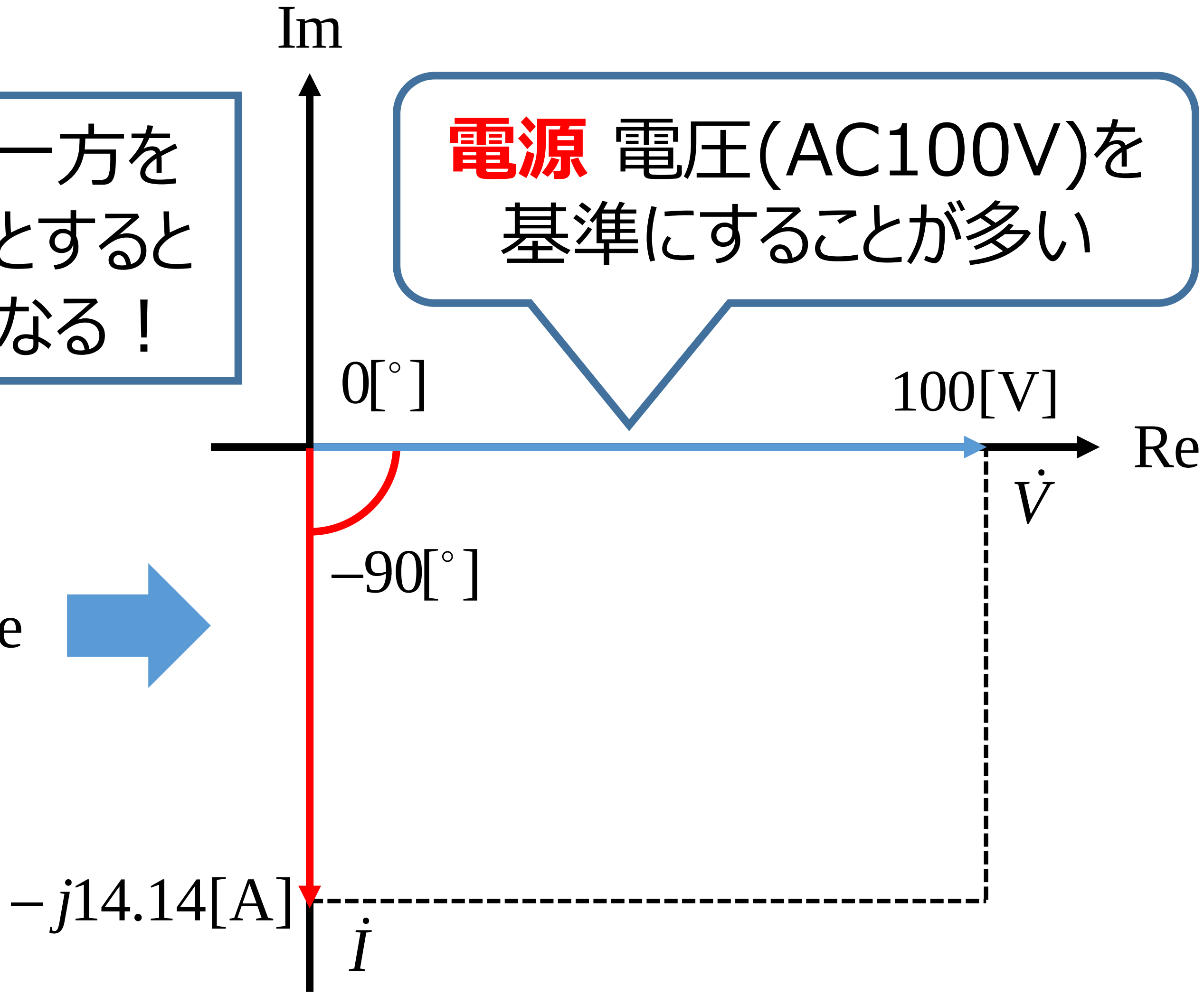
同じ単位のものに
関しては **ベクトル** の
大きさ を揃えて
フェーザ図を描く！

電流と電圧では単位が **異なる** ため，
ベクトル の **大きさ** は揃える必要は無いが
位相 は揃えなければならない！

電圧を基準とした場合の正弦波交流のフェーザ図



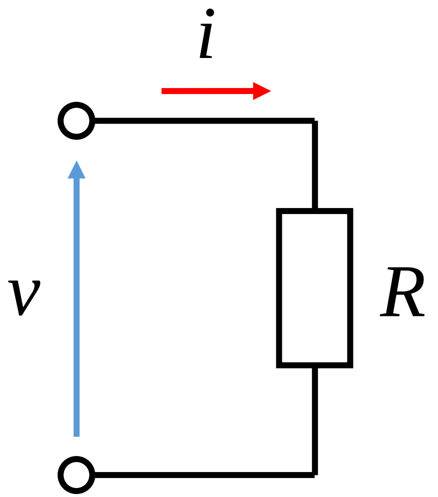
電圧か電流の一方を基準（**0°**）とすると整理がしやすくなる！



電源 電圧(AC100V)を基準にすることが多い

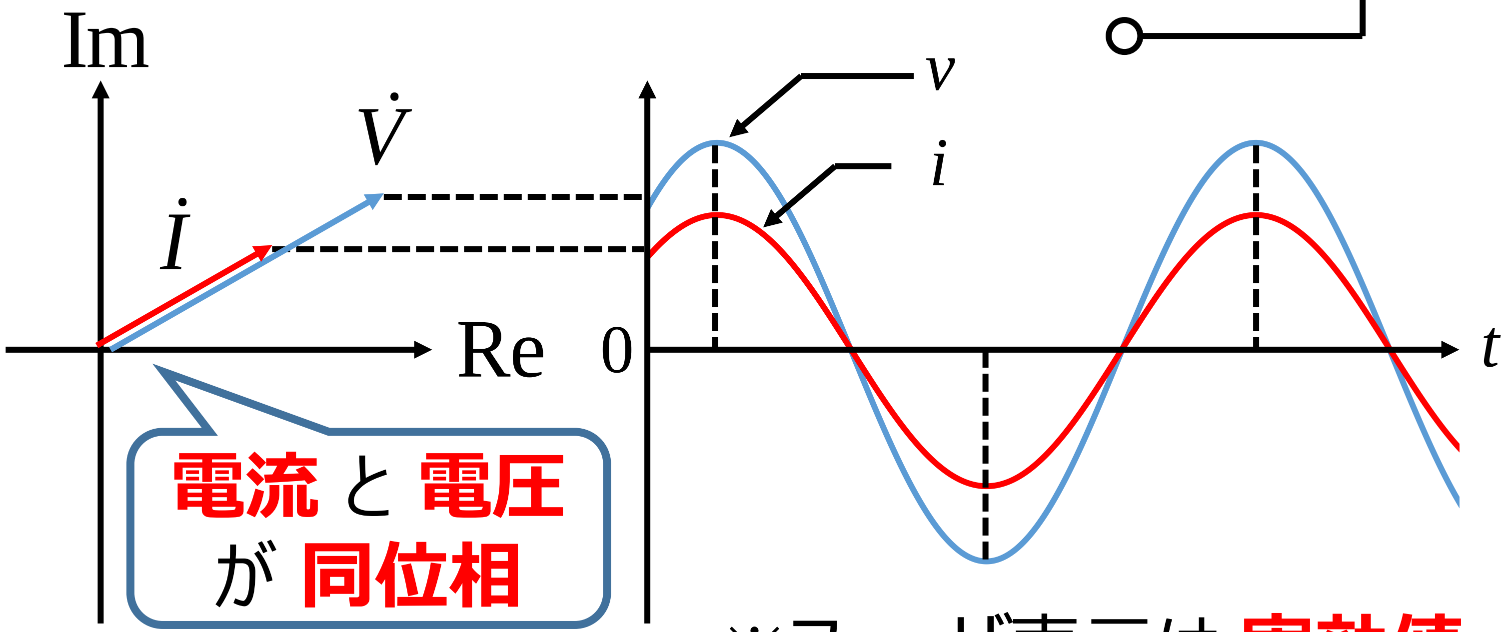
抵抗 (Resistance)

R, i, v の関係は，$v = Ri$　（交流回路における **オーム** の法則）



オーム の法則より，電流と電圧の大きさは抵抗に **比例** するが，
位相には変化が **無い** ため，電流を **フェーザ** 表示で表すと，

$$\begin{cases} \dot{I} = I\angle\theta_{\mathrm{I}} \\ \dot{V} = RI\angle\theta_{\mathrm{I}} \equiv V\angle\theta_{\mathrm{V}} \end{cases}$$



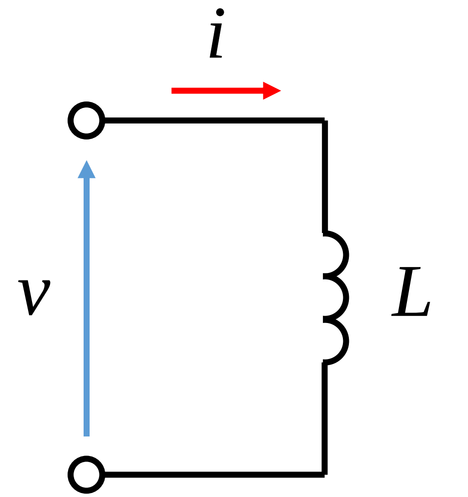
よって，一般的に

$$\boxed{\dot{V} = R\dot{I}\,[\mathrm{V}] \qquad \dot{I} = \frac{\dot{V}}{R}\,[\mathrm{A}]}$$

※フェーザ表示は **実効値**

インダクタンス (Inductance)

L, i, v の関係は，　$v = L\dfrac{di}{dt}$　（ファラデーの **電磁誘導** の法則）



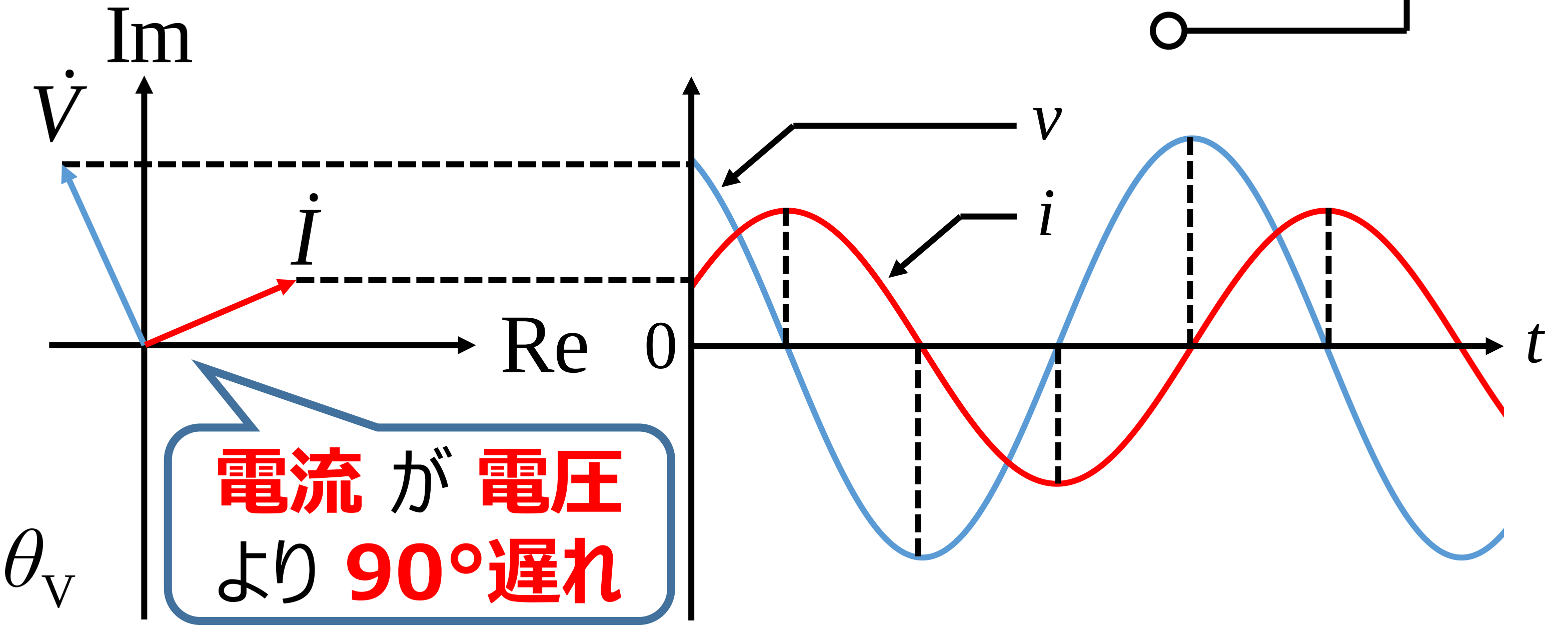
ここで，正弦波電流 $i = I_{\mathrm{m}} \sin\left(\omega t + \theta_{\mathrm{I}}\right)$ を **微分** すると，

$$v = L\frac{d}{dt} I_{\mathrm{m}} \sin\left(\omega t + \theta_{\mathrm{I}}\right) = \omega L I_{\mathrm{m}} \cos\left(\omega t + \theta_{\mathrm{I}}\right)$$

$$= \omega L I_{\mathrm{m}} \sin\left(\omega t + \theta_{\mathrm{I}} + \frac{\pi}{2}\right)$$

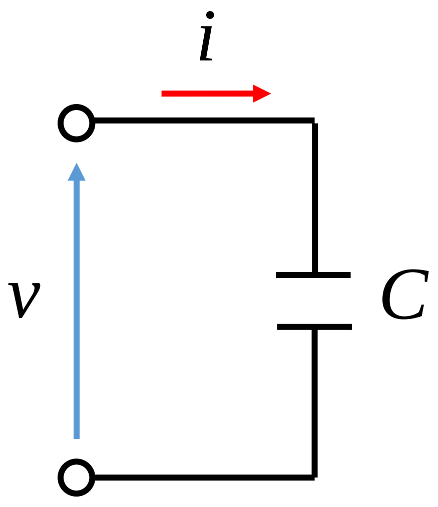
よって，フェーザ表示は

$$\begin{cases} \dot{I} = I\angle\theta_{\mathrm{I}} \\ \dot{V} = \omega L I \angle\left(\theta_{\mathrm{I}} + 90^\circ\right) \equiv V\angle\theta_{\mathrm{V}} \end{cases}$$



キャパシタンス (Capacitance)

C, i, v の関係は， $v=\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i\,dt \;\Rightarrow\; i=C\dfrac{dv}{dt}$



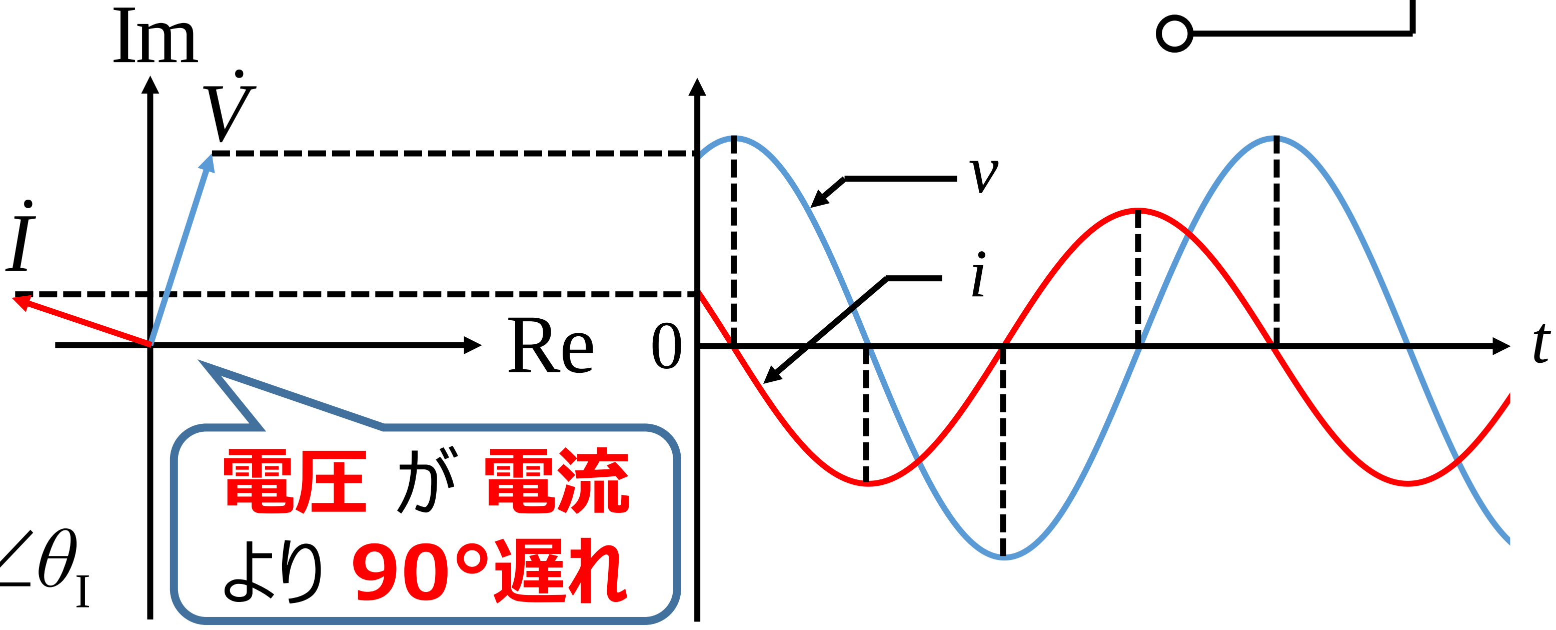
i と v の関係が **インダクタンス** と **逆** になっているので，同様に

$$i=C\frac{d}{dt}V_{\mathrm{m}}\sin\left(\omega t+\theta_{\mathrm{V}}\right)=\omega C V_{\mathrm{m}}\cos\left(\omega t+\theta_{\mathrm{V}}\right)$$

$$=\omega C V_{\mathrm{m}}\sin\left(\omega t+\theta_{\mathrm{V}}+\frac{\pi}{2}\right)$$

よって，フェーザ表示は

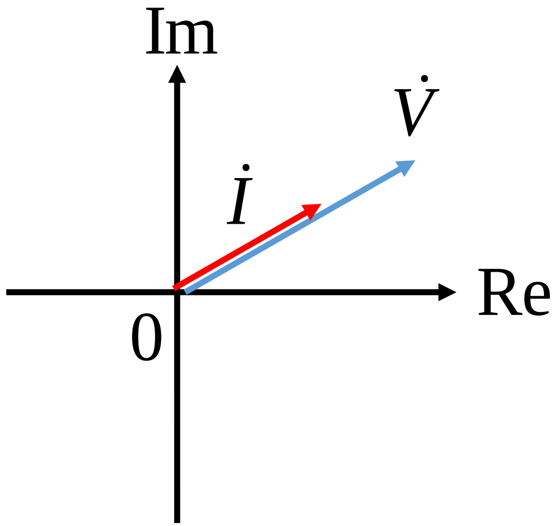
$$\begin{cases}\dot{V}=V\angle\theta_{\mathrm{V}}\\ \dot{I}=\omega C V\angle\left(\theta_{\mathrm{V}}+90^\circ\right)\equiv I\angle\theta_{\mathrm{I}}\end{cases}$$



回路要素のまとめ

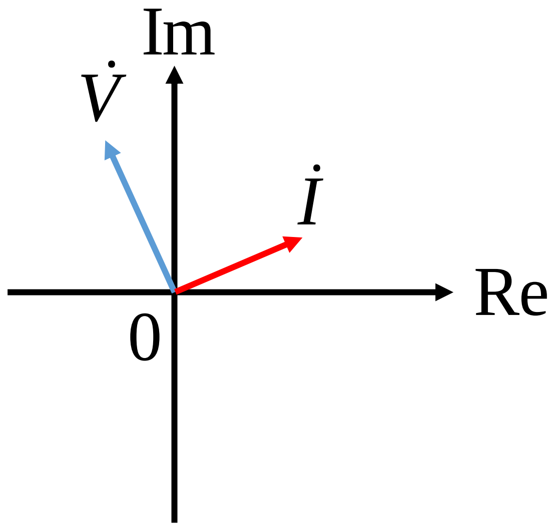
抵抗：R

$$\begin{cases} \dot{V} = R\dot{I}\,[\mathrm{V}] \\ \dot{I} = \dfrac{\dot{V}}{R}\,[\mathrm{A}] \end{cases}$$



インダクタンス：L

$$\begin{cases} \dot{V} = j\omega L\dot{I}\,[\mathrm{V}] \\ \dot{I} = \dfrac{\dot{V}}{j\omega L} = -j\dfrac{1}{\omega L}\dot{V}\,[\mathrm{A}] \end{cases}$$



キャパシタンス：C

$$\begin{cases} \dot{V} = \dfrac{\dot{V}}{j\omega C} = -j\dfrac{1}{\omega C}\dot{V}\,[\mathrm{V}] \\ \dot{I} = j\omega C\dot{V}\,[\mathrm{A}] \end{cases}$$