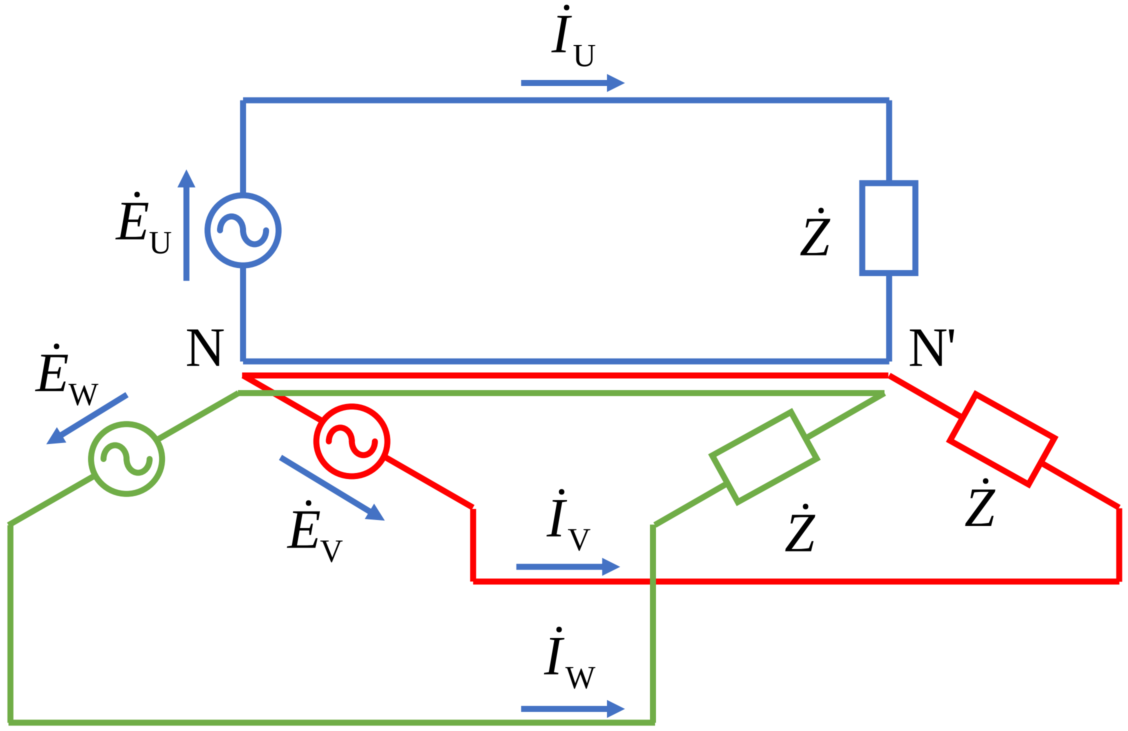
27. 対称三相交流回路（3）

27. Symmetrical Three-phase AC Circuit (3)

講義内容

1. 対称三相交流の電力
2. 対称三相交流のまとめ
3. 二電力計法：ブロンデルの定理

対称三相交流の電力：Y-Y結線



Y-Y結線には **環状** 電流が無い

相 電圧の大きさ： V

線 電流の大きさ： I

電圧と電流の **位相差** ： θ_{Z}

U相が **基準**

1 相あたりの **有効** 電力： $P_{\mathrm{U}} = VI\cos\theta_{\mathrm{Z}}$

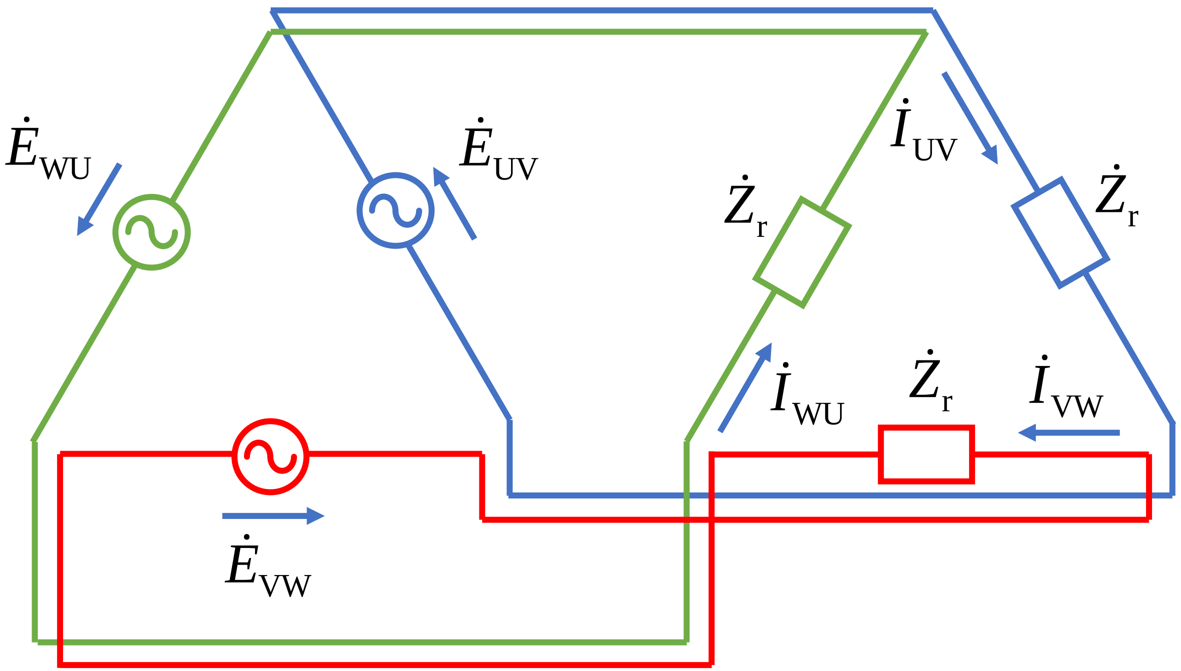
3 相 **有効** 電力： $P = 3VI\cos\theta_{\mathrm{Z}}$

線間 電圧の大きさ： V_{r}

線間 電圧と **相** 電圧の関係： $V_{\mathrm{r}} = \sqrt{3}V$

$$\therefore P = 3VI\cos\theta_{\mathrm{Z}} = 3\frac{V_{\mathrm{r}}}{\sqrt{3}}I\cos\theta_{\mathrm{Z}} = \sqrt{3}V_{\mathrm{r}}I\cos\theta_{\mathrm{Z}}$$

対称三相交流の電力：Δ-Δ結線



Δ-Δ結線には **相** 電圧が無い
（※ **中性点** からの **相** 電圧が無い）

線間 電圧の大きさ：　V_{r}
環状 電流の大きさ：　I_{r}
電圧と電流の **位相差** ：θ_{Zr}

U-V相が **基準**

1 相あたりの **有効** 電力：$P_{\mathrm{UV}} = V_{\mathrm{r}} I_{\mathrm{r}} \cos\theta_{\mathrm{Zr}}$
3 相 **有効** 電力：　$P = 3V_{\mathrm{r}} I_{\mathrm{r}} \cos\theta_{\mathrm{Zr}}$

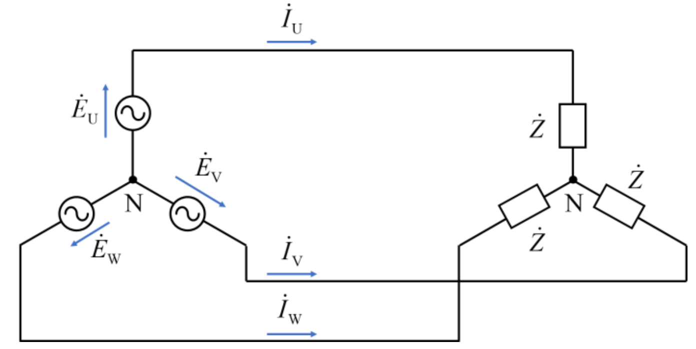
線 電流の大きさ：I
線 電流と **環状** 電流の関係：$I = \sqrt{3} I_{\mathrm{r}}$

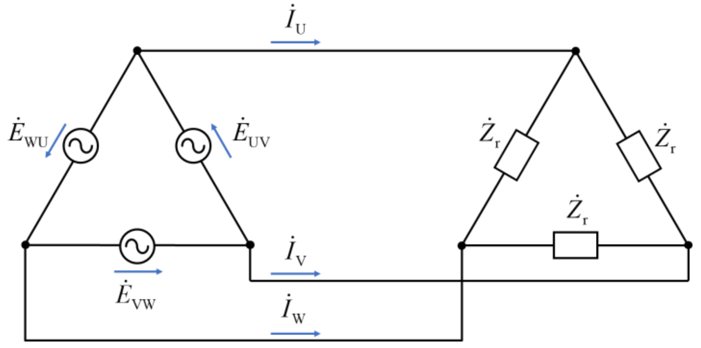
$$\therefore P = 3V_{\mathrm{r}} I_{\mathrm{r}} \cos\theta_{\mathrm{Zr}} = 3V_{\mathrm{r}} \frac{I}{\sqrt{3}} \cos\theta_{\mathrm{Zr}} = \sqrt{3} V_{\mathrm{r}} I \cos\theta_{\mathrm{Zr}}$$

対称三相交流のまとめ

各種 **Y-Δ** 変換：**Y-Y** 結線か **Δ-Δ** 結線になるように変換

- 対称三相交流 **電圧**： 　$線間電圧 V_{\mathrm{r}} = 相電圧 V \times \sqrt{3}$
- 対称三相交流 **電流**： 　$線電流 I = 環状電流 I_{\mathrm{r}} \times \sqrt{3}$
- 三相平衡 **インピーダンス**： $\Delta 結線負荷 \dot{Z}_{\mathrm{r}} = \mathrm{Y} 結線負荷 \dot{Z} \times 3$





3相 **有効** 電力

- Y-Y結線：$P_{\text{Y-Y}} = 3VI\cos\theta_{\mathrm{Z}} = \sqrt{3}V_{\mathrm{r}}I\cos\theta_{\mathrm{Z}}$
- Δ-Δ結線：$P_{\Delta\text{-}\Delta} = 3V_{\mathrm{r}}I_{\mathrm{r}}\cos\theta_{\mathrm{Zr}} = \sqrt{3}V_{\mathrm{r}}I\cos\theta_{\mathrm{Zr}}$

対称三相交流の **有効** 電力は
結線に **よらず**，次式で表すことが可能

$P = \sqrt{3} \times 線間電圧 \times 線電流 \times 負荷の力率$

二電力計法：ブロンデルの定理

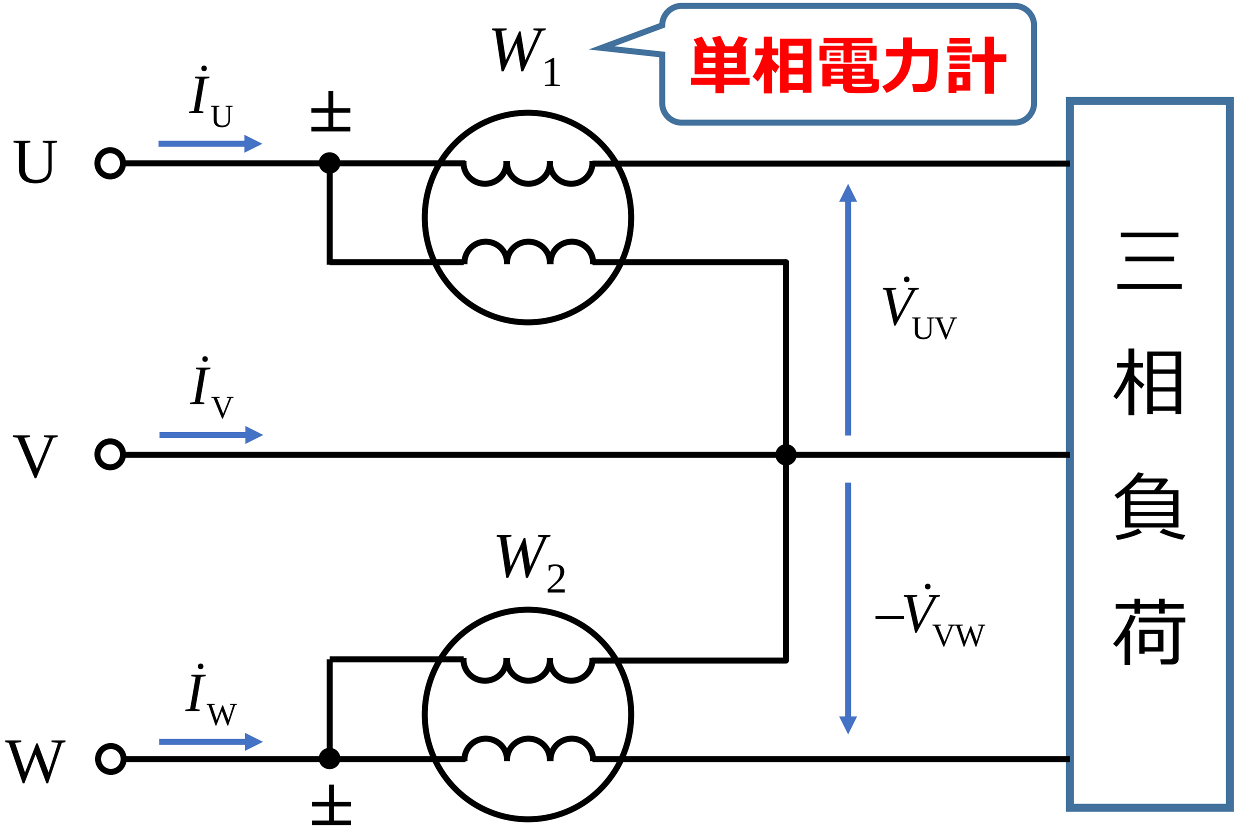
ブロンデル の定理 (Blondel's Theorem)

n 相 n 線式の（有効）電力は $n\text{–}1$ 個の単相電力計を用いて計測することが出来る

- **非対称**，**不平衡** でも成り立つ
- 中性線がある場合でもない場合でもよい

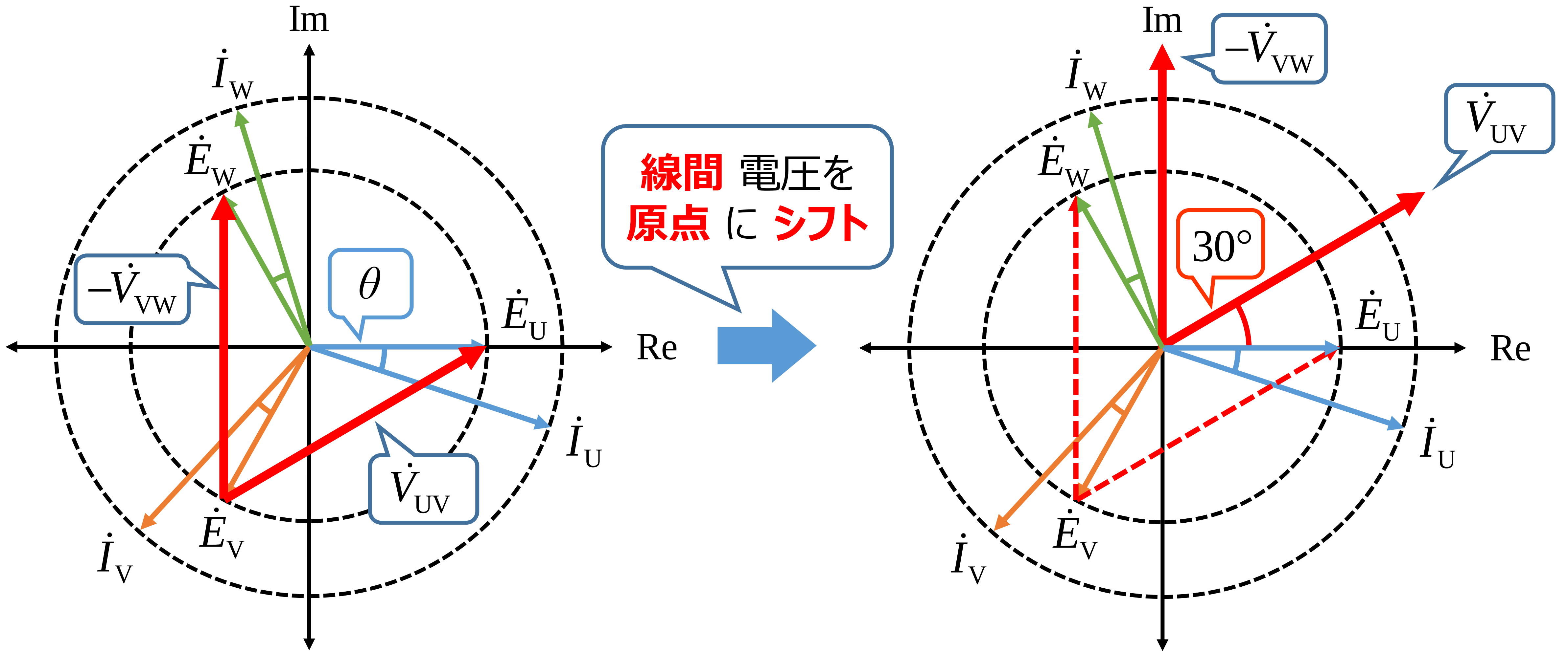
単相電力計は1相あたりの **線** 電流と
線間 電圧を測定するように結線
（上記パラメータは各結線方法に存在）

W_1：$\dot{I}_U$ と $\dot{V}_{UV}$ を測定
W_2：$\dot{I}_W$ と $-\dot{V}_{VW}$ を測定



対称平衡三相回路（電源はY結線とする）

負荷の位相角を θ (**遅れ**) とすると，ベクトル図は下図のようになる（ **電流** が **電圧** より θ 遅れ）



対称平衡三相回路（電源はY結線とする）

ベクトル図より，W_1の電力P_1は，

$$P_1 = \left|\dot{V}_{\mathrm{UV}}\right|\left|\dot{I}_{\mathrm{U}}\right|\cos\left(\dot{V}_{\mathrm{UV}}\text{と}\dot{I}_{\mathrm{U}}\text{の位相差}\right)$$

$$= \left|\dot{V}_{\mathrm{UV}}\right|\left|\dot{I}_{\mathrm{U}}\right|\cos\left(30^\circ + \theta\right)$$

W_1の **測定値**

同様に，W_2の電力P_2は，　（※大きさは **絶対値** ）

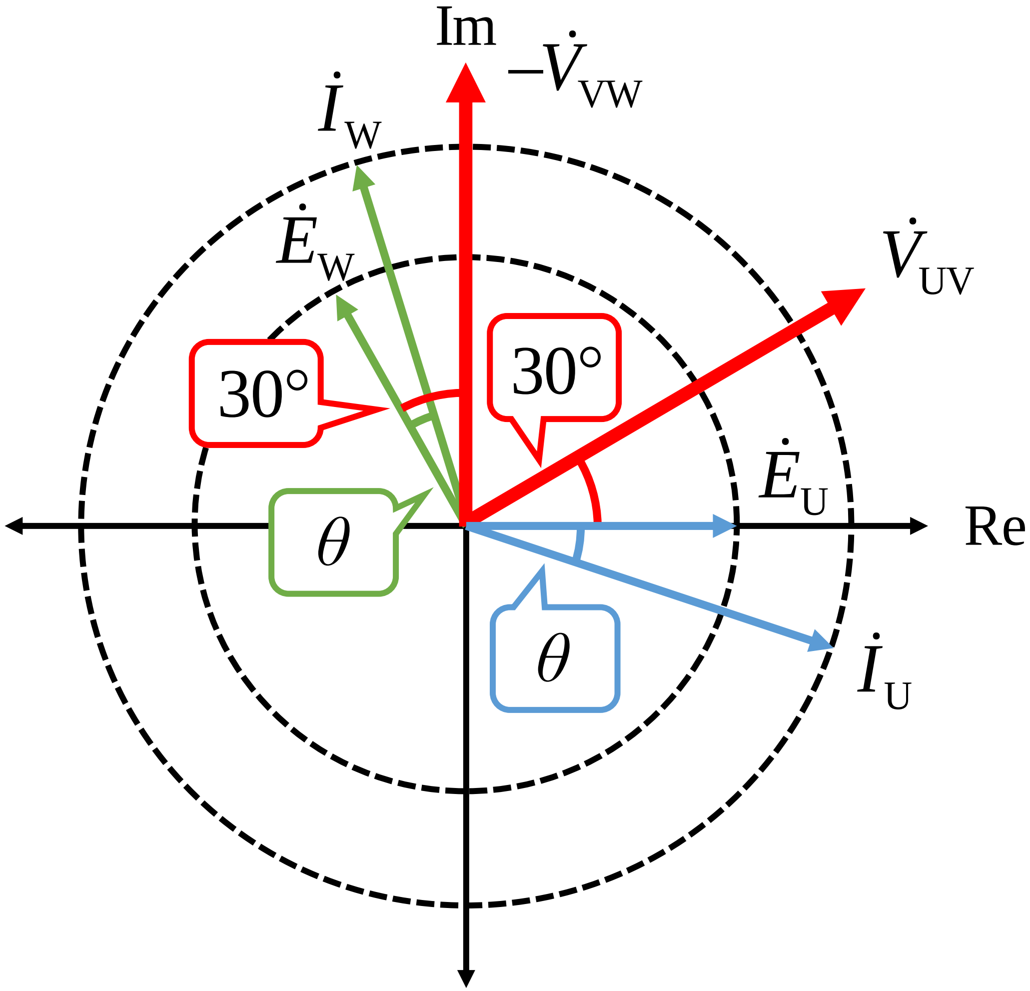
$$P_2 = \left|\dot{V}_{\mathrm{VW}}\right|\left|\dot{I}_{\mathrm{W}}\right|\cos\left(-\dot{V}_{\mathrm{VW}}\text{と}\dot{I}_{\mathrm{W}}\text{の位相差}\right)$$

$$= \left|\dot{V}_{\mathrm{VW}}\right|\left|\dot{I}_{\mathrm{W}}\right|\cos\left(30^\circ - \theta\right)$$

W_2の **測定値**

電圧及び電流の大きさは各相で **等しい** ため，

$$\left|\dot{V}_{\mathrm{UV}}\right| = \left|\dot{V}_{\mathrm{VW}}\right| = V_{\mathrm{r}} = \sqrt{3}V \quad , \quad \left|\dot{I}_{\mathrm{U}}\right| = \left|\dot{I}_{\mathrm{W}}\right| = I$$



二電力計法による三相有効電力の測定

両電力計W_1, W_2の各（**有効**）電力P_1, P_2の**和**は

$$P_1+P_2=V_\mathrm{r}I\cos(30°+\theta)+V_\mathrm{r}I\cos(30°-\theta)=V_\mathrm{r}I\{\cos(30°+\theta)+\cos(30°-\theta)\}$$

三角関数の**積和**の公式

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$$

$$\therefore P_1+P_2=V_\mathrm{r}I\times2\cos30°\cos\theta=V_\mathrm{r}I\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\sqrt{3}V_\mathrm{r}I\cos\theta=3VI\cos\theta$$

三相**有効**電力

これにより，**2**つの電力計の指示値の**和**が三相**有効**電力と等しいため，
ブロンデルの定理が証明された（**二電力計**法による**三相**電力が**測定**可能）
※θが**60°**以上の場合，$P_1<0$となるので，電力計の電圧コイルの極性を変える必要がある

二電力計法による三相無効電力の測定

両電力計W_1, W_2の各電力P_1, P_2の **差** は

$$P_2 - P_1 = V_\mathrm{r} I\cos(30^\circ - \theta) - V_\mathrm{r} I\cos(30^\circ + \theta) = V_\mathrm{r} I\{\cos(30^\circ - \theta) - \cos(30^\circ + \theta)\}$$

三角関数の **積和** の公式

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$$

$$\therefore P_2 - P_1 = V_\mathrm{r} I \times 2\sin 30^\circ \sin\theta = V_\mathrm{r} I \times 2 \times \frac{1}{2}\sin\theta = V_\mathrm{r} I\sin\theta = \sqrt{3}VI\sin\theta$$

$$\frac{\text{三相 \textbf{無効} 電力}}{\sqrt{3}}$$

これにより， **2** つの電力計の指示値の **差** の$\sqrt{3}$倍が三相 **無効** 電力と等しい

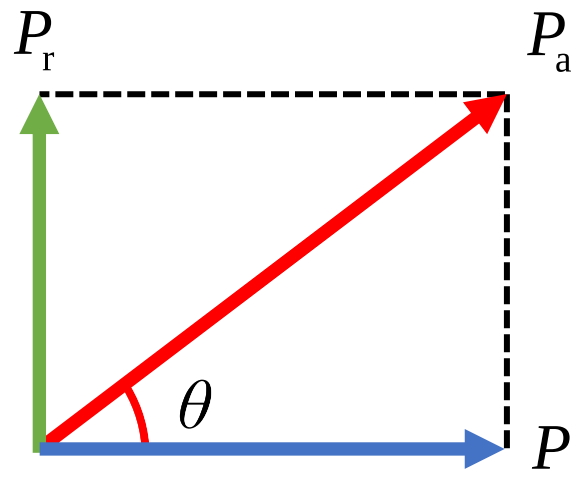
※W_2の結線を変更し，測定する線間電圧を $\dot{V}_\mathrm{vw}$ とする場合，無効電力の計算は $\boldsymbol{P_1 - P_2}$となる

※θが **60°** 以上の場合，$P_1 < 0$となるので，電圧計の電圧コイルの極性を変える必要がある

二電力計法による各種電力と力率の計算

三相 **無効** 電力

$$P_{\mathrm{r}} = 3VI\sin\theta$$
$$= \sqrt{3}\left(P_1 - P_2\right)$$



三相 **皮相** 電力

$$P_{\mathrm{a}} = 3VI$$
$$= \sqrt{P^2 + P_{\mathrm{r}}^2}$$

三相 **有効** 電力

$$P = 3VI\cos\theta$$
$$= P_1 + P_2$$

力率

$$\cos\theta = \frac{P}{P_{\mathrm{a}}}$$

無効率

$$\sin\theta = \frac{P_{\mathrm{r}}}{P_{\mathrm{a}}}$$

各種電力の別記及び単位

P	=	P	[**W**]	：ワット
P_{r}	=	**Q**	[**var**]	：**バール**
P_{a}	=	**S**	[**VA**]	：**ボルトアンペア**

2 つの単相電力計の指示値のみで各種 **電力** （有効，無効，皮相）及び **力率** を測定可能

二電力計法による力率の計算（特殊な場合）

両電力計W_1, W_2の
各電力P_1, P_2の **和** と **差** を用いて，

$$\frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1} = \frac{\sqrt{3}VI\sin\theta}{3VI\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\tan\theta}{\sqrt{3}}$$

式を変形して，

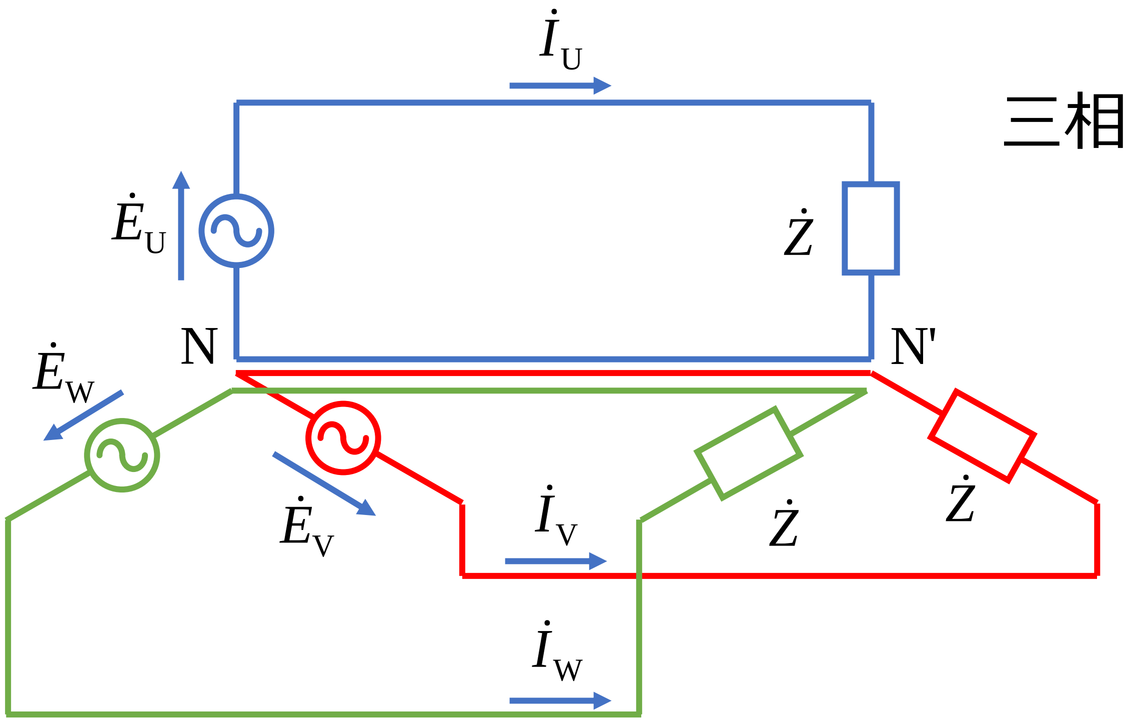
$$\tan\theta = \sqrt{3}\cdot\frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1} = \sqrt{3}\cdot\frac{1-\dfrac{P_1}{P_2}}{1+\dfrac{P_1}{P_2}} = \sqrt{3}\cdot\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad \left(\alpha = \frac{P_1}{P_2}\right)$$

三角関数の公式より，

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+3\cdot\left(\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2}} = \frac{1+\alpha}{2\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}}$$

2 つの単相電力計の値の比のみで，**力率** を計算可能

二電力計法なら非対称三相交流でも計測できる理由



三相交流の瞬時電力は，　$P = e_{\mathrm{U}} i_{\mathrm{U}} + e_{\mathrm{V}} i_{\mathrm{V}} + e_{\mathrm{W}} i_{\mathrm{W}}$

KCLより，　$i_{\mathrm{U}} + i_{\mathrm{V}} + i_{\mathrm{W}} = 0$

$$\begin{aligned}
\therefore P &= e_{\mathrm{U}} i_{\mathrm{U}} + e_{\mathrm{V}} i_{\mathrm{V}} + e_{\mathrm{W}} i_{\mathrm{W}} \\
&= e_{\mathrm{U}} i_{\mathrm{U}} + e_{\mathrm{V}} \left(-i_{\mathrm{U}} - i_{\mathrm{W}} \right) + e_{\mathrm{W}} i_{\mathrm{W}} \\
&= \underbrace{\left(e_{\mathrm{U}} - e_{\mathrm{V}} \right) i_{\mathrm{U}}}_{W_1} + \underbrace{\left(e_{\mathrm{W}} - e_{\mathrm{V}} \right) i_{\mathrm{W}}}_{W_2}
\end{aligned}$$

W_1 : $\dot{I}_{\mathrm{U}}$ と $\dot{V}_{\mathrm{UV}}$ を測定

W_2 : $\dot{I}_{\mathrm{W}}$ と $-\dot{V}_{\mathrm{VW}}$ を測定

各相の電流の **和** は不平衡でも **ゼロ** となる

線間 電圧と **相** 電流（ **線** 電流）は
他の結線方法の全てに共通して存在する