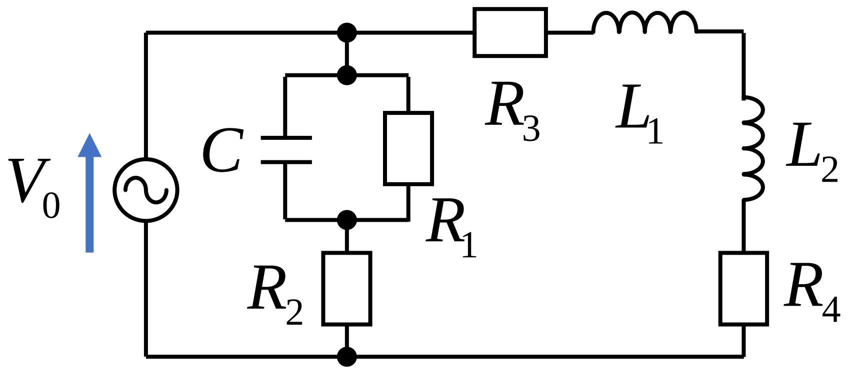
９．分布定数回路と伝送線路
9. The Distributed Constant Circuit and The Transmission Line

講義内容

１．集中定数回路と分布定数回路
２．伝送線路方程式
３．伝搬定数と特性インピーダンス

集中定数回路

これまで扱ってきた電気回路



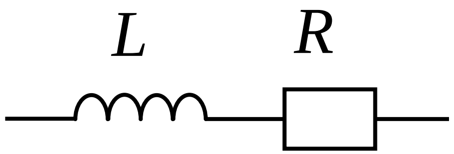
- R, L, C の素子値が周波数に依存しない
- 素子間の導線の抵抗・インダクタンス，導線間のキャパシタンスを無視

⇒ **集中定数回路** という

■周波数があまり高くない場合…

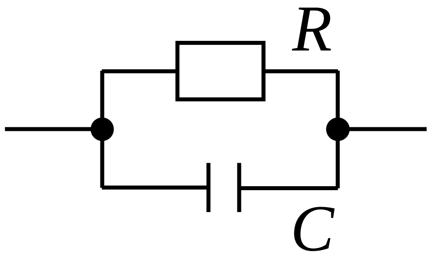
インダクタンス L
- コイルの導線には抵抗あり
- L はほぼ一定

→



キャパシタンス C
- コンデンサは誘電体損失あり
- C はほぼ一定

→

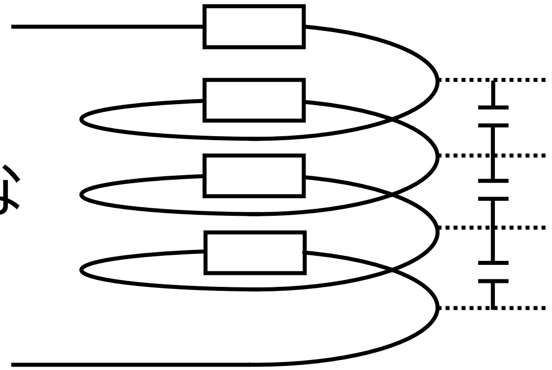


⇒ これらも含めて **集中定数回路** として取り扱える

分布定数回路

簡単な集中定数回路として考えられない場合

例：
コイルの厳密な
等価回路



導線抵抗の他にコイル線間に
キャパシタンスが分布（ **分布容量** ）

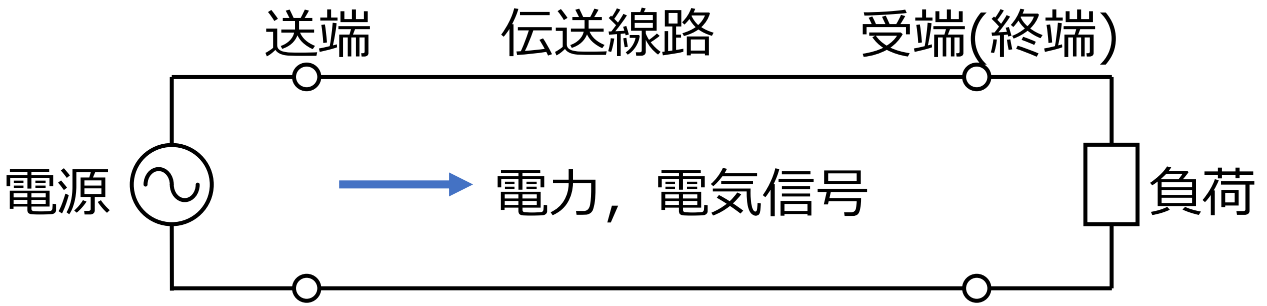
高周波の場合，コイルに影響
⇒ L が一定ではなくなる

➡ このような回路を **分布定数回路** という

分布定数 回路

R, L, C が複雑に分布する回路は
解析が非常に困難

実用上重要で解析が容易なのは
伝送線路 ≒ **分布定数回路**（一般に）



集中定数回路と分布定数回路

整理すると…

集中 定数回路

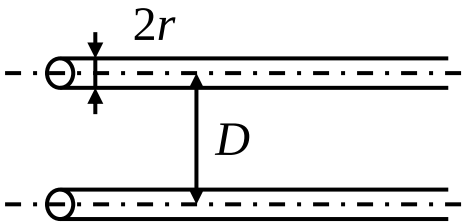
導線を無視して **回路要素** が **1点** に **集中** していることを想定した回路
つまり，**長さ** の **概念** が **無い** 回路
（回路図には便宜上導線を描く．導線が無いと回路構成がわからない）

分布 定数回路

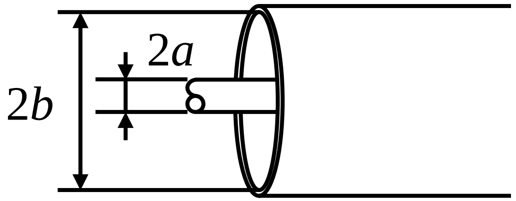
導線上 に **回路要素** が **均一分布** していることを想定した回路
つまり，**長さ** の **概念** が **有る** 回路
（一般に，**伝送線路** を意味する．集中定数回路と **取り扱い** が **異なる** ）

伝送線路

実用上最も広く使われる伝送線路：**平行導線**



同軸線路

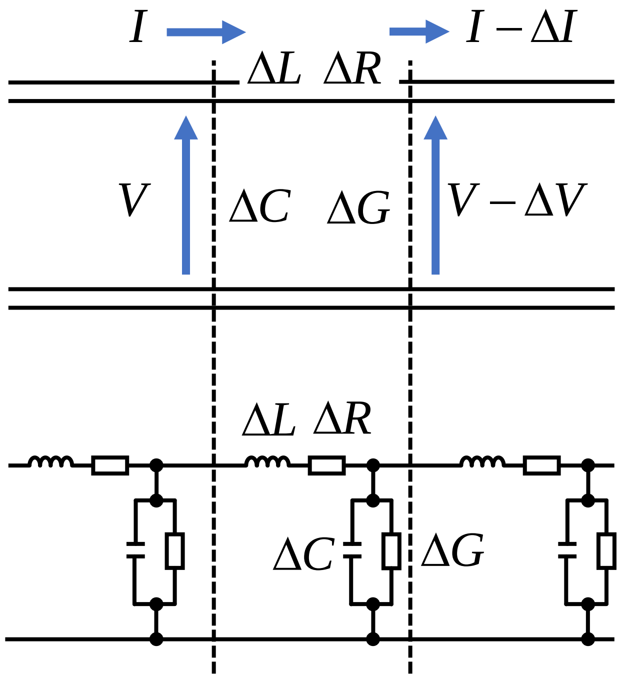


● 伝送線路内の電磁気現象

- 導体に電流が流れると → **磁界** が形成 → 導体に沿って L が分布
- 二つの導体間の電位が異なると → **電界** が形成 → 導体間に C が分布

● 伝送線路内の損失

- 導体からの **漏れ電流** → 導体に沿って R が分布
- 絶縁物による **電力損** → 導体間に G が分布



<u>伝送線路の **等価回路** 表現</u>

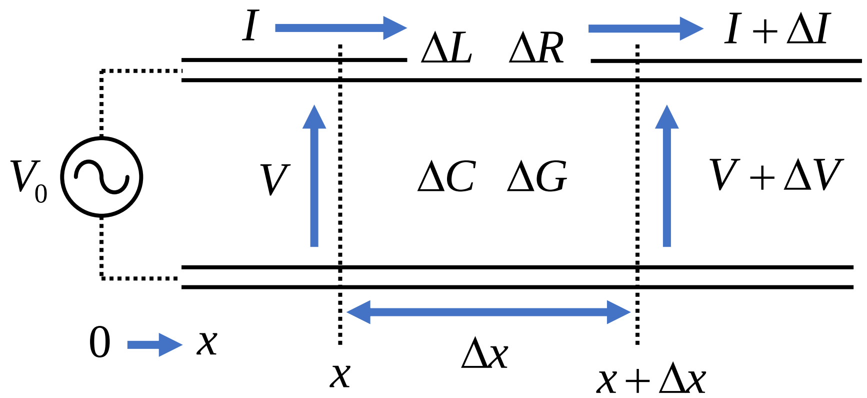
- 伝送線路に沿って **連続** 的に **微小** な **素子**
- ΔR，ΔL，ΔG，ΔC が **均一** に **分布** すると考える

等価回路表現 →

伝送線路方程式の導出

伝送線路上の電圧 V と電流 I の関係式を導出する

微小区間
Δxについて



線路の単位長あたり

インダクタンス　：L
抵抗　：R
キャパシタンス：C
コンダクタンス　：G

→

Δx あたり

$L\Delta x$
$R\Delta x$
$C\Delta x$
$G\Delta x$

Δx を十分に小さくとれば ΔV，ΔI に以下の近似が成り立つ

$$\begin{cases} -\Delta V \approx (\Delta R + j\omega \Delta L) I = (R + j\omega L)\Delta x I \\ -\Delta I \approx (\Delta G + j\omega \Delta C) V = (G + j\omega C)\Delta x V \end{cases}$$

Δx を無限に小さくし，$\Delta x \rightarrow dx$とすれば，

$$\boxed{-\frac{dV}{dx} = (R + j\omega L) I}$$

$$\boxed{-\frac{dI}{dx} = (G + j\omega C) V}$$

この二つの式を
伝送線路方程式 という

伝送線路方程式の整理

解くための準備（方程式の変形）

$$\begin{cases} -\dfrac{dV}{dx} = (R + j\omega L)I \\ -\dfrac{dI}{dx} = (G + j\omega C)V \end{cases}$$

①微分 $\quad -\dfrac{d^2V}{dx^2} = (R + j\omega L)\dfrac{dI}{dx}$

②代入

$$\boxed{\dfrac{d^2V}{dx^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)V}$$

2階線形微分方程式

$j\omega \rightarrow \dfrac{\partial}{\partial t} \quad \dfrac{d}{dx} \rightarrow \dfrac{\partial}{\partial x}$ と置き換えをすると任意の電源に対応

$\sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \equiv \gamma \equiv \alpha + j\beta$ と定義すると

$$\boxed{\dfrac{d^2V}{dx^2} = \gamma^2 V}$$

一般に **波動方程式** と呼ぶ（ γ ：**伝搬定数** ）
伝送線路上の **電圧** は **波動** である

伝送線路方程式の一般解

伝送線路上の電圧

$$\frac{d^2V}{dx^2}=\gamma^2V$$

一般解は…

$$\boxed{V=V_1e^{-\gamma x}+V_2e^{\gamma x}=V_1e^{-\alpha x}e^{-j\beta x}+V_2e^{\alpha x}e^{j\beta x}}$$

②代入　　(V_1,V_2は境界条件で決まる)

伝送線路上の電流

$$-\frac{dV}{dx}=(R+j\omega L)I$$

①変形

$$I=-\frac{1}{R+j\omega L}\cdot\frac{dV}{dx}=\sqrt{\frac{G+j\omega C}{R+j\omega L}}(V_1e^{-\gamma x}-V_2e^{\gamma x})$$

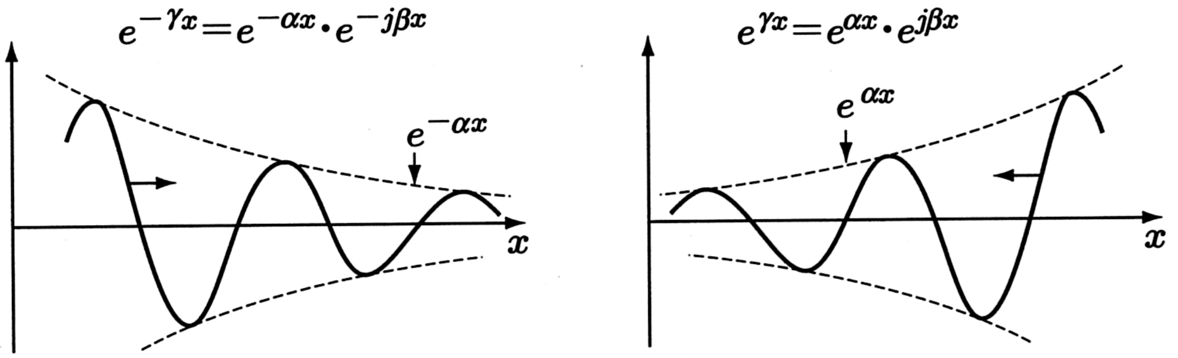
○電圧波の第1項

$e^{-\alpha x}$ はxの増大に対して **減少** する因子

$e^{-j\beta x}$ はxの増大に対して **振動** する因子

→ 電源から負荷に進む波（ **入射波** ）

○電圧波の第2項 → 負荷から電源に進む波（ **反射波** ）



※電流波も同様

伝搬定数

伝搬定数 γ について

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

位相 定数 … 位相の変化の仕方を示す値

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(R^2+\omega^2L^2)(G^2+\omega^2C^2)}+(\omega^2LC-RG)\right\}} \quad [\mathrm{rad/m}]$$

「 **位相** が **2π違う** 点 **間** の **長さ** 」**=**「 **波長** λ 」より $\beta\lambda = 2\pi$ → $\beta = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

減衰 定数 … 線路に沿っての電圧・電流の減衰を示す値

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(R^2+\omega^2L^2)(G^2+\omega^2C^2)}-(\omega^2LC-RG)\right\}} \quad [\mathrm{Neper/m}]$$

⇒ 伝搬定数は **線路固有の量** である

伝搬速度

伝搬速度 v と波長λの関係

「1周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ の間に進む距離」＝「波長λ」より

$$vT = \lambda = \frac{2\pi}{\beta} \longrightarrow v = \frac{2\pi}{T\beta} = \frac{\omega}{\beta} = 1 \Bigg/ \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{R^2}{\omega^2}+L^2\right)\left(\frac{G^2}{\omega^2}+C^2\right)}+\left(LC-\frac{RG}{\omega^2}\right)\right\}}$$

周波数 が **変化** すると **伝搬速度** も **変化** する

⇒ 線路に **分散性** がある

諸条件下での伝搬速度

電力損 が十分 **小**
周波数 が **高** い

の場合（ $R \ll \omega L$， $G \ll \omega C$ ） $\longrightarrow$ $v \approx \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

光速 に近い

電力損を無視できないが $\dfrac{R}{L} = \dfrac{G}{C}$ の関係がある場合 $\longrightarrow$ $v = \dfrac{\omega}{\beta} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \cong c$[m/s]

無ひずみ 条件

このとき， $\alpha = R\sqrt{C/L}$ [Neper/m]

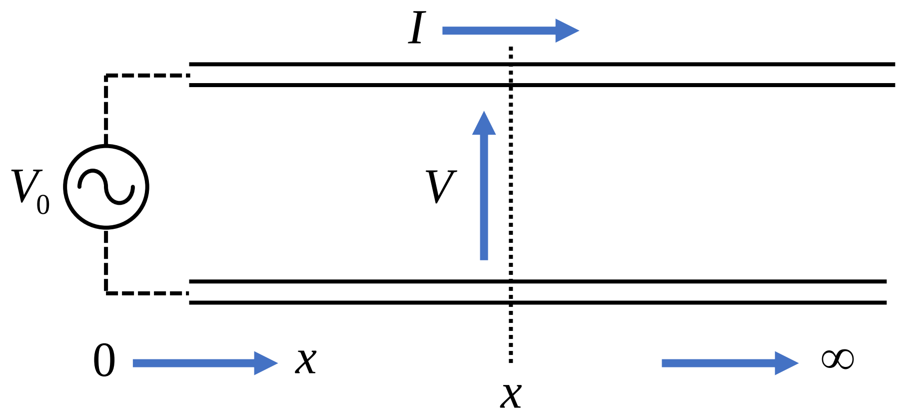
特性インピーダンス

伝送線路上での電圧 V と電流 I の関係は？

位置 x が依存するので複雑

⇒ __半無限長線路__ を考える

反射波なし の特殊線路



反射波が無いので，$V_2 = 0$
送端 条件より，$V = V_1 e^0 = V_1 = V_0$

__半無限線路__ 上の電圧と電流の比

$$\begin{cases} V = V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x} = V_0 e^{-\gamma x} \\ I = \sqrt{\dfrac{G + j\omega C}{R + j\omega L}} V_1 e^{-\gamma x} - \sqrt{\dfrac{G + j\omega C}{R + j\omega L}} V_2 e^{\gamma x} = \sqrt{\dfrac{G + j\omega C}{R + j\omega L}} V_0 e^{-\gamma x} \end{cases}$$

$$\frac{V}{I} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \equiv Z_0 = R_0 + jX_0$$

伝搬線路の **特性インピーダンス** という

（伝搬線路とともに **線路固有の量** ）

特性インピーダンス

特性インピーダンスの実部と虚部

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \equiv R_0 + jX_0$$

$$\begin{cases} R_0 = \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{R^2+\omega^2 L^2}{G^2+\omega^2 C^2}} + \dfrac{RG+\omega^2 LC}{G^2+\omega^2 C^2}\right)} \\ X_0 = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{R^2+\omega^2 L^2}{G^2+\omega^2 C^2}} - \dfrac{RG+\omega^2 LC}{G^2+\omega^2 C^2}\right)} \end{cases}$$

$\dfrac{R}{L} < \dfrac{G}{C}$ のとき **正**･･･**誘導** 性

$\dfrac{R}{L} > \dfrac{G}{C}$ のとき **負**･･･**容量** 性

諸条件下での特性インピーダンス

無ひずみの場合 $R_0 = \sqrt{\dfrac{R}{G}} = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$, $X_0 = 0$

極低損失の場合 $R_0 \approx \sqrt{\dfrac{R}{G}} \approx \sqrt{\dfrac{L}{C}}$, $X_0 \approx 0$

無ひずみ や **極低損失** の場合の
特性インピーダンス は **純抵抗** とみなせる