10. 分布定数回路の線路定数
10. Line Constant of the Distributed Constant

講義内容

1. 特性インピーダンスの復習
2. 平行導線線路の線路定数
3. 同軸線路の線路定数

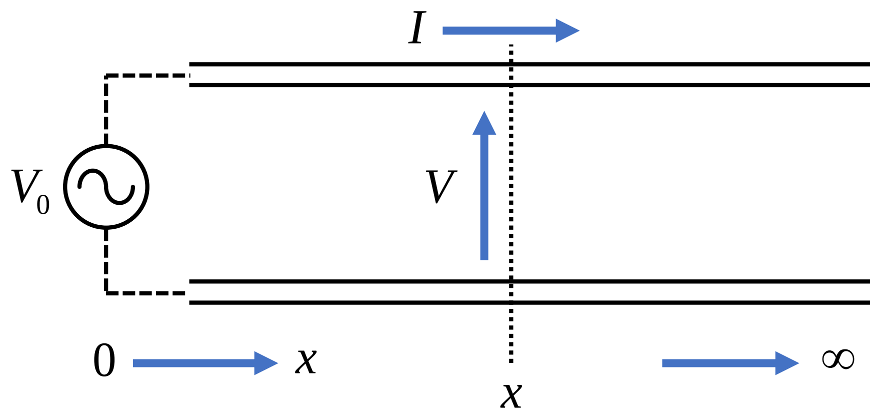
特性インピーダンス

伝送線路上での電圧 V と電流 I の関係は？

位置 x が依存するので複雑

⇒ **半無限長線路** を考える

反射波なし の特殊線路



反射波が無いので，$V_2 = 0$
送端 条件より，$V = V_1 e^0 = V_1 = V_0$

半無限長線路 上の電圧と電流の比

$$\begin{cases} V = V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x} = V_0 e^{-\gamma x} \\ I = \sqrt{\dfrac{G + j\omega C}{R + j\omega L}} V_1 e^{-\gamma x} - \sqrt{\dfrac{G + j\omega C}{R + j\omega L}} V_2 e^{\gamma x} = \sqrt{\dfrac{G + j\omega C}{R + j\omega L}} V_0 e^{-\gamma x} \end{cases}$$

$$\frac{V}{I} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \equiv Z_0 = R_0 + jX_0$$

伝搬線路の **特性インピーダンス** という

（伝搬定数とともに **線路固有の量** ）

特性インピーダンス

特性インピーダンスの実部と虚部

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \equiv R_0 + jX_0$$

$$\begin{cases} R_0 = \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{R^2+\omega^2 L^2}{G^2+\omega^2 C^2}} + \dfrac{RG+\omega^2 LC}{G^2+\omega^2 C^2}\right)} \\ X_0 = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{R^2+\omega^2 L^2}{G^2+\omega^2 C^2}} - \dfrac{RG+\omega^2 LC}{G^2+\omega^2 C^2}\right)} \end{cases}$$

$\dfrac{R}{L} < \dfrac{G}{C}$ のとき **正** ・・・ **誘導** 性

$\dfrac{R}{L} > \dfrac{G}{C}$ のとき **負** ・・・ **容量** 性

諸条件下での特性インピーダンス

無ひずみの場合 $R_0 = \sqrt{\dfrac{R}{G}} = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$, $X_0 = 0$

極低損失の場合 $R_0 \approx \sqrt{\dfrac{R}{G}} \approx \sqrt{\dfrac{L}{C}}$, $X_0 \approx 0$

無ひずみ や **極低損失** の場合の
特性インピーダンス は **純抵抗** とみなせる

例題１－１

伝送線路の直列インピーダンス Z と並列アドミタンス Y が次の値を持つ時，特性インピーダンス Z_0，減衰定数 α 及び位相定数 β を求めよ

$$Z = 0.072 + j0.468[\Omega/\mathrm{km}] = \sqrt{0.072^2 + 0.468^2}\angle\tan^{-1}\frac{0.468}{0.072} = 0.474\angle 81.25^\circ$$

$$Y = j0.3637\times 10^{-7}[\mathrm{S/km}] = 0.3637\times 10^{-7}\angle 90^\circ$$

極座標 表示

以上より，特性インピーダンスZ_0は

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{0.474\angle 81.25^\circ}{0.3637\times 10^{-7}\angle 90^\circ}} = 3.6\times 10^3\angle -4.38^\circ$$

$$= 3.6\times 10^3(\cos 4.38^\circ - j\sin 4.38^\circ)$$

$$= 3590 - j275[\Omega]$$

例題１－２

また，伝搬定数 γ は，

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{0.474\angle 81.25^\circ \times 0.3637 \times 10^{-7}\angle 90^\circ} = 1.31 \times 10^{-4}\angle 85.63^\circ$$

$$= 1.31 \times 10^{-4}(\cos 85.63^\circ + j\sin 85.63^\circ)$$

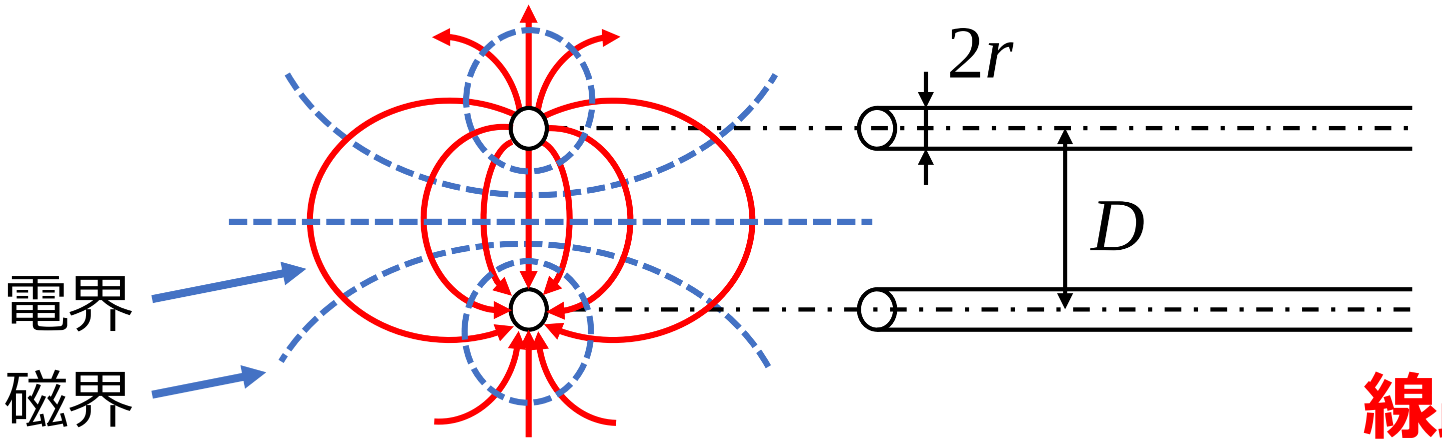
$$= 9.98 \times 10^{-6} + j1.306 \times 10^{-4}$$

$$= \alpha + j\beta$$

したがって，減衰定数 α と位相定数 β は

$$\begin{cases} \alpha = 9.98 \times 10^{-6} [\mathrm{Neper/km}] \\ \beta = 1.306 \times 10^{-4} [\mathrm{rad/km}] \end{cases}$$

平行導線線路の線路定数L,C



円形断面で同じ太さの導線が一般的

線路定数 ⇒ **電磁現象** で定まる

往復線の単位長あたりの
インダクタンスL，キャパシタンスC（電磁気学から）

μ：線路周囲の透磁率

μ_1：導線の透磁率

ε：導線周囲の誘電率

$$L = \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{D + \sqrt{D^2 - 4r^2}}{2r} + \frac{\mu_1}{\pi}\delta$$

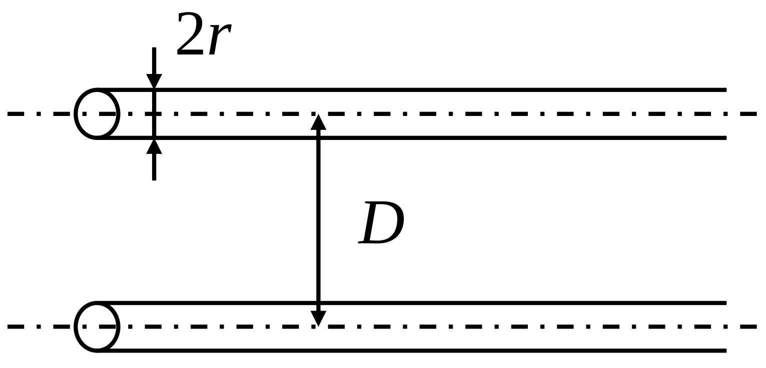
δ：電流が流れる表皮の厚さ

$$C = \frac{\pi\varepsilon}{\ln \dfrac{D + \sqrt{D^2 - 4r^2}}{2r}} \text{[F/m]}$$

Lの近似表現

<u>インダクタンス L</u>

$$L = \frac{\mu}{\pi}\ln\frac{D+\sqrt{D^2-4r^2}}{2r} + \frac{\mu_1}{\pi}\delta\,[\mathrm{H/m}]$$



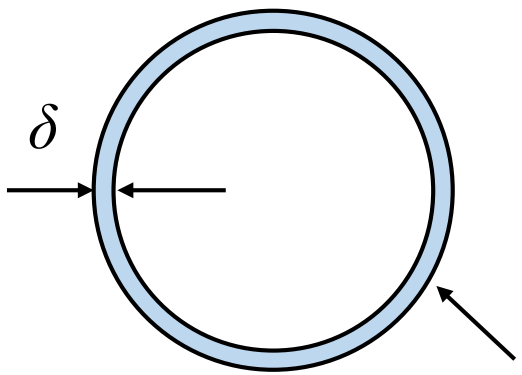
線路周囲は通常空気　$\Rightarrow$　$\mu = \mu_0$

高周波 では **電流** はほとんど **表面のみを** 流れる（ **表皮効果** ）$\Rightarrow \delta \approx 0$

第2項は無視

平行導線は一般に $r << D$

$$L \approx \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{D}{r}\,[\mathrm{H/m}] \quad (r << D)$$



電流が流れる **表皮**

L の **近似** 表現

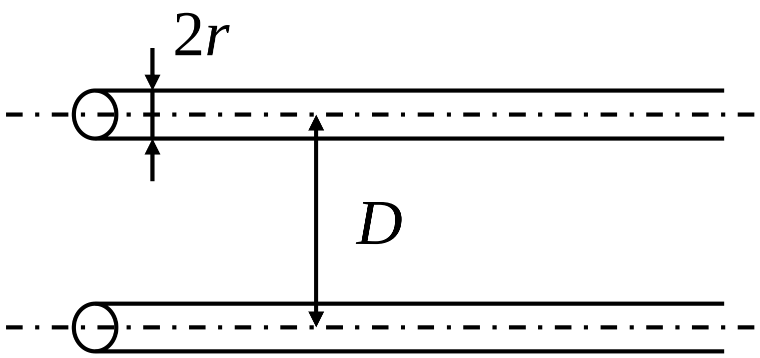
Cの近似表現

キャパシタンス C

$$C = \frac{\pi\varepsilon}{\ln \dfrac{D+\sqrt{D^2-4r^2}}{2r}\pi} \text{[F/m]}$$

導線周囲は通常空気 $\Rightarrow$ $\varepsilon = \varepsilon_0$

平行導線は一般に $r << D$



$$C = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln \dfrac{D}{r}} \text{[F/m]}$$

C の **近似** 表現

特性インピーダンス・伝搬速度

特性インピーダンス の計算（ **極低損失** もしくは **無ひずみ** の場合）

$$Z_0 = R_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{D}{r} \Big/ \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{D}{r}}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\ln\frac{D}{r}$$

ここで， $z_0 \equiv \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad (= 377[\Omega])$ とおいて $Z_0 = R_0 = \frac{z_0}{\pi}\ln\frac{D}{r}[\Omega]$

伝搬速度 の計算（ **極低損失** もしくは **無ひずみ** の場合）

$c = \frac{1}{\sqrt{LC}} \approx \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c_0 = 2.998\times 10^8[\mathrm{m/s}]$ 伝搬速度は **光速** に **等しい**

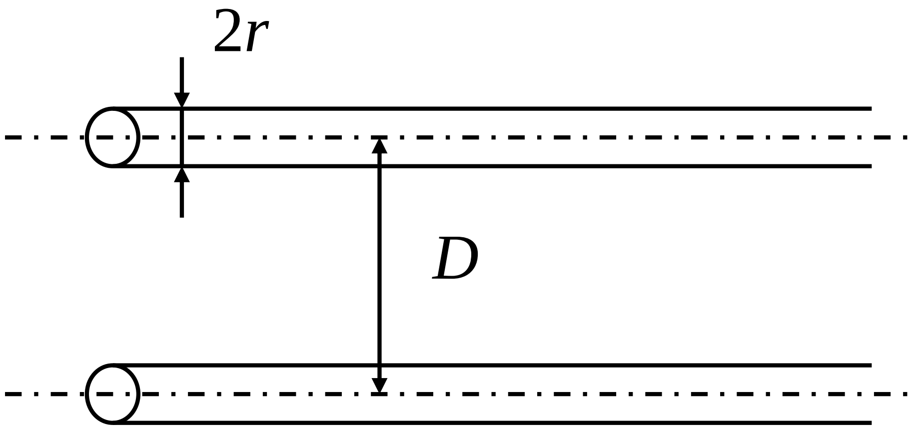
線路周囲が比誘電率 ε_r の物質 $\Rightarrow$ 伝搬速度は $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}}$ 倍

例題２

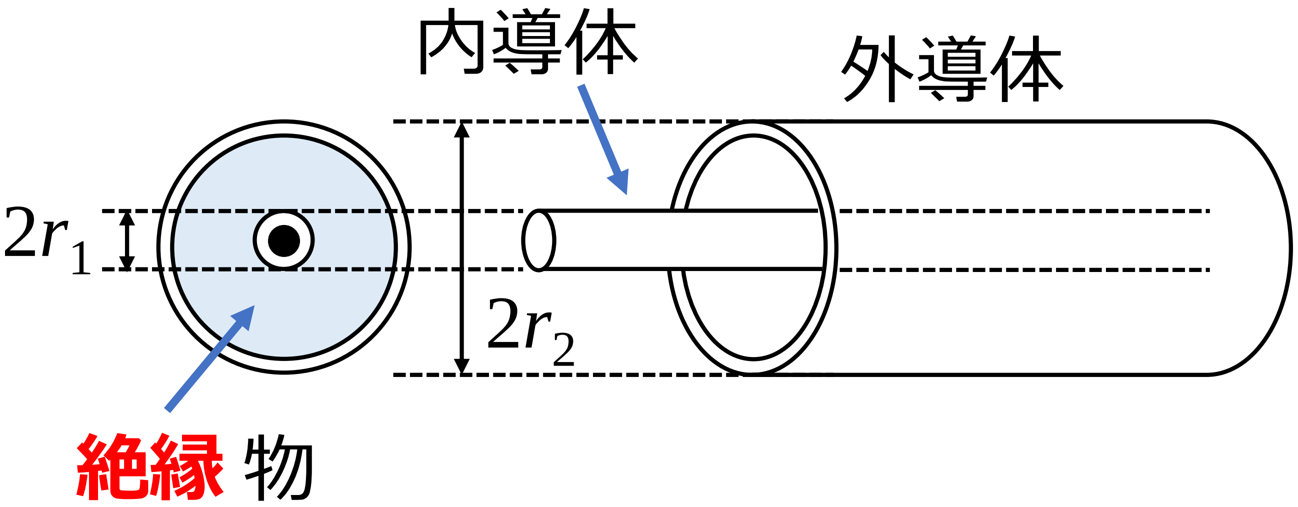
直径2[mm]の円形断面の導線で，空中に平行導線の伝送線路を作る．
導線の中心線間隔を12[cm]にしたとき，この伝送線路の特性インピーダンスの近似値はいくらになるか。

導線の断面半径rは線間隔Dに対して十分小さいので，

$$Z_0 = R_0 = \frac{z_0}{\pi}\ln\frac{D}{r} = \frac{377}{\pi}\ln\frac{12}{0.1} = 574[\Omega]$$



同軸線路の線路定数L，C



円筒導体の軸に円形断面の導体を入れたもの

内外導体間には **絶縁** 物（**誘電** 体）が **挿入**

単位長あたりのL，C

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}\,[\mathrm{H/m}]$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\,[\mathrm{F/m}]$$

特性インピーダンス

$$Z_0 = R_0 \approx \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_r\varepsilon_0}}\ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{z_0}{2\pi\sqrt{\varepsilon_r}}\ln\frac{r_2}{r_1}\,[\Omega]$$

伝搬速度 $$c = \frac{1}{\sqrt{LC}} \approx \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}\,[\mathrm{m/s}]$$

例題３

高周波用同軸伝送線路を作りたい．内導体の直径を6[mm]，内外導体間を満たす絶縁物の比誘電率を2.25とすると，特性インピーダンスを50[Ω]にするには，外導体の内径（直径）はいくらにすればよいか．また，この同軸線路で周波数60[MHz]の高周波電力を伝送すると，線路上の伝搬速度及び波長はいくらか．

特性インピーダンスを表す式 $Z_0 = R_0 \approx \dfrac{z_0}{2\pi\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}} \ln \dfrac{r_2}{r_1} [\Omega]$ から，

外導体の内径d_2は $d_2 = 2r_2 = 2r_1 \exp\left(\dfrac{2\pi\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}Z_0}{z_0}\right) = 6\exp\left(\dfrac{2\pi\sqrt{2.25}\times 50}{377}\right) = 20.94[\mathrm{mm}]$

伝搬速度cは

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}} = \frac{2.998\times 10^8}{\sqrt{2.25}} = 1.999\times 10^8 [\mathrm{m/s}]$$

波長λは

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{1.999\times 10^8}{60\times 10^6} = 3.331[\mathrm{m}]$$