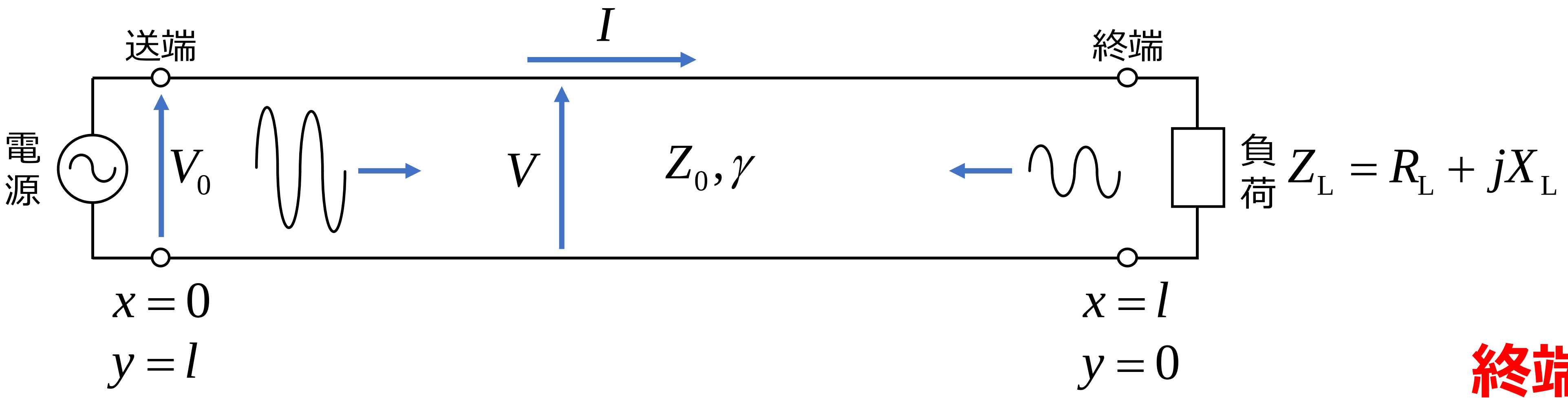
11. 伝送線路方程式と反射係数
11. Transmission-Line Equation and Reflection Coefficient

講義内容

1. 伝送線路方程式の完全解
2. 伝送線路上の電圧・電流の分布
3. 反射係数

有限長伝送線路

一般の伝送線路 … **有限長** 伝送線路



終端 によって
反射波 が生じる

線路上の任意の点xにおける電圧・電流は,

$$\begin{cases} V = V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x} \\ I = \dfrac{1}{Z_0}(V_1 e^{-\gamma x} - V_2 e^{\gamma x}) \end{cases}$$

反射波成分

V_1とV_2は任意定数

↓

任意定数V_1とV_2は **境界条件** により定まる

境界条件から振幅V_1，V_2を計算

伝送線路方程式の一般解

$$\begin{cases} V = V_1 e^{-\gamma x} + V_2 e^{\gamma x} \\ I = \dfrac{1}{Z_0}(V_1 e^{-\gamma x} - V_2 e^{\gamma x}) \end{cases}$$

送端 側の **境界条件**　$x = 0 \Rightarrow V = V_0$ → $V_0 = V_1 + V_2$

終端 側の **境界条件**

$x = l$ での電圧・電流をV_l，I_lとすると → $Z_\mathrm{L} = \dfrac{V_l}{I_l}$

$$Z_\mathrm{L} = \frac{V_l}{I_l} = \frac{V_1 e^{-\gamma l} + V_2 e^{\gamma l}}{\frac{1}{Z_0}(V_1 e^{-\gamma l} - V_2 e^{\gamma l})} = Z_0 \frac{V_1 e^{-\gamma l} + V_2 e^{\gamma l}}{V_1 e^{-\gamma l} - V_2 e^{\gamma l}}$$

以下の２式より，

$$\begin{cases} V_1 = V_0 \dfrac{(Z_\mathrm{L} + Z_0)e^{\gamma l}}{(Z_\mathrm{L} - Z_0)e^{-\gamma l} + (Z_\mathrm{L} + Z_0)e^{\gamma l}} \\ V_2 = V_0 \dfrac{(Z_\mathrm{L} - Z_0)e^{-\gamma l}}{(Z_\mathrm{L} - Z_0)e^{-\gamma l} + (Z_\mathrm{L} + Z_0)e^{\gamma l}} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ **完全** な解

完全な解と反射係数

伝送線路方程式の完全な解

$$V = V_0 \frac{(Z_L + Z_0)e^{\gamma(l-x)} + (Z_L - Z_0)e^{-\gamma(l-x)}}{(Z_L - Z_0)e^{-\gamma l} + (Z_L + Z_0)e^{\gamma l}} = V_0 e^{-\gamma x} \frac{1 + \dfrac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} e^{-2\gamma(l-x)}}{\dfrac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} e^{-2\gamma l} + 1}$$

$$\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = K = |K| e^{j\theta}$$

反射係数

極座標表示

反射係数 を用いると,

$$\begin{cases} V = V_0 e^{-\gamma x} \dfrac{1 + K e^{-2\gamma(l-x)}}{1 + K e^{-2\gamma l}} \\ I = \dfrac{V_0}{Z_0} e^{-\gamma x} \dfrac{1 - K e^{-2\gamma(l-x)}}{1 + K e^{-2\gamma l}} \end{cases}$$

分子に注目 →

$$1 + K e^{-2\gamma(l-x)}$$

入射波

同じ場所 x での **入射波** に対する **反射波** の **大きさ**・**位相** の **関係** を表す

反射係数 K の意味

$|K|$ ：終端での反射波の大きさの割合

θ ：終端での反射波の位相の進み角

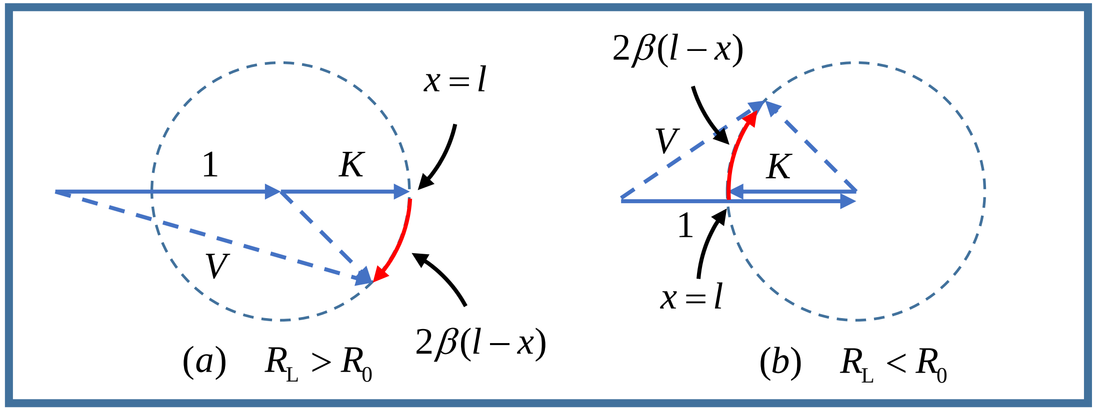
電圧定在波

フェーザ図から **電圧定在波** を考える

簡単化の為，**無損失** 線路（特性インピーダンス：R_0）＆ **抵抗** 負荷（R_L)で

$$K=\frac{R_L-R_0}{R_L+R_0}=\begin{cases}|K|e^{j0} & R_L>R_0 \quad (a)\\ |K|e^{j\pi} & R_L<R_0 \quad (b)\end{cases}$$

入射波，反射波，合成波のフェーザ図 ⟶



$R_L>R_0$ の場合

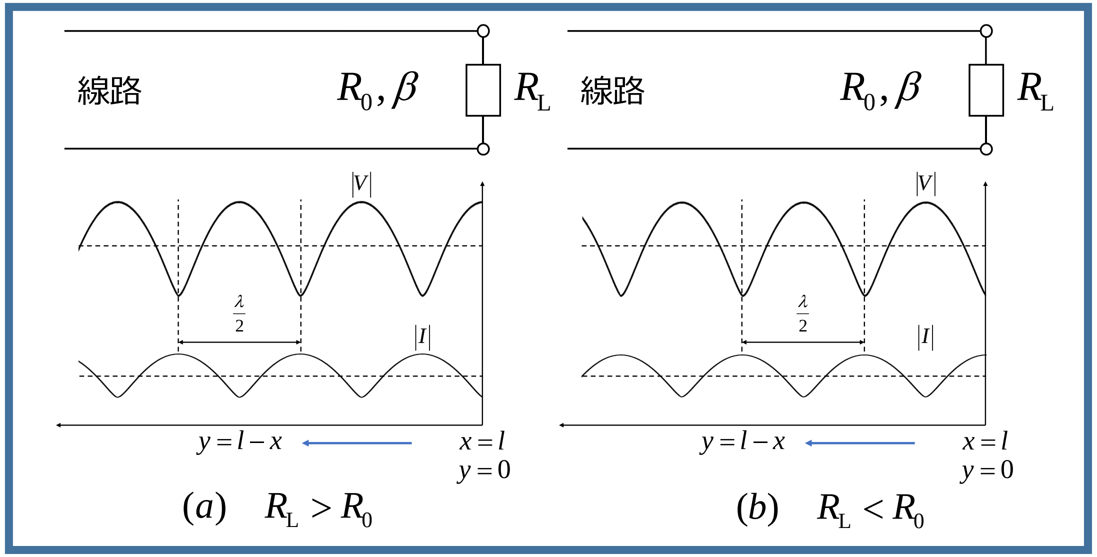
- $x=l$ の点で電圧 **最大**
- 位相が π ずれた点で電圧 **最小**

$R_L<R_0$ の場合

- $x=l$ の点で電圧 **最小**
- 位相が π ずれた点で電圧 **最大**

共に **位置** が変わると **電圧** が変化

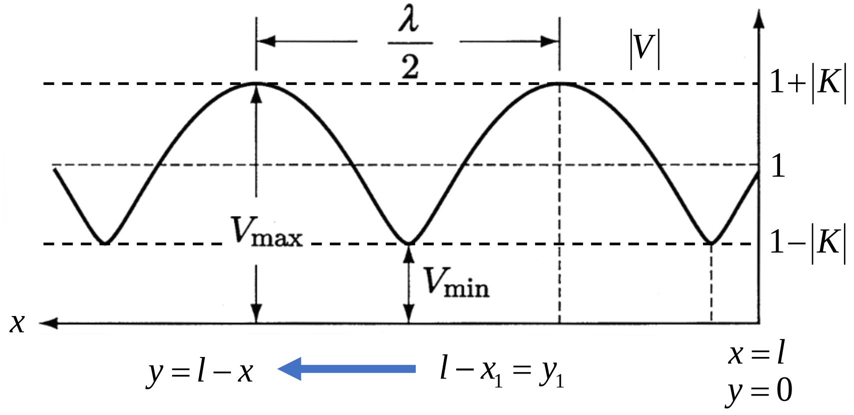
以上より **定在波** を描くと⇒



反射係数と電圧定在波比

電圧定在波の波形

フェーザ図の合成波の大きさ（長さ）より
電圧定在波の波形が描ける



波形より
- 電圧の **最大** 振幅 $V_{max} \propto 1+|K|$
- 電圧の **最小** 振幅 $V_{min} \propto 1-|K|$

→ V_{max}とV_{min}の比を定義 → **電圧定在波比 ρ**（**VSWR**：**V** oltage **S** tanding **W** ave **R** atio)

$$\rho = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{1+|K|}{1-|K|} \geq 1$$

$$(1 \geq |K| \geq 0)$$

- $|K| = 0$： $\rho = 1$（定在波無し）
- $|K| \to 1$：ρ 増大
- $|K| = 1$： $\rho = \infty$

逆に → $|K| = \dfrac{\rho - 1}{\rho + 1}$ ρを測定すれば$|K|$がわかる

θ は? 電圧最小となる点では反射波と入射波が逆位相
終端からV_{min}の位置までの長さ（y_1)を計測

$$1 + Ke^{-j2\beta(l-x)} = 1 + |K|e^{j\theta}e^{-j2\beta y_1} = 1 + |K|e^{j(\theta - 2\beta y_1)}$$

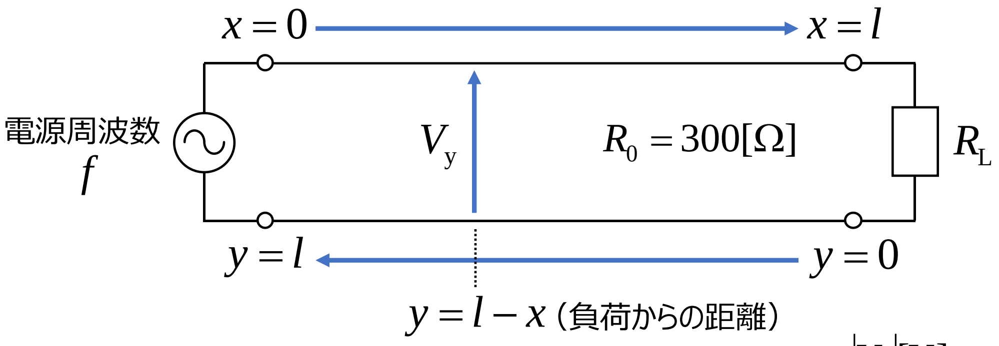
$$\rightarrow \theta - 2\beta y_1 = \pm\pi \rightarrow \theta = 2\beta y_1 \pm \pi = \frac{4\pi y_1}{\lambda} \pm \pi$$

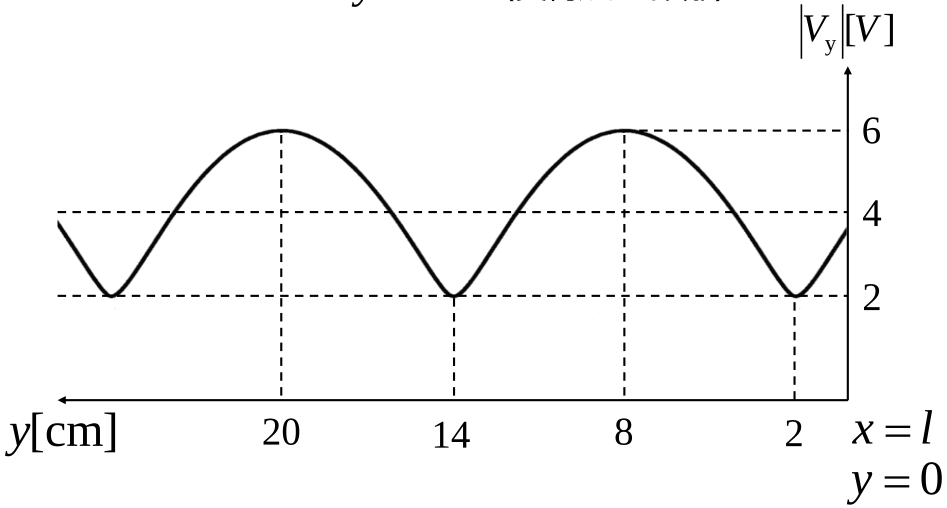
⇒ 反射係数Kは **測定** することが出来る ⇒ 線路の特性インピーダンスから **負荷を計算可**

例題

特性インピーダンス Z_0=300[Ω]の無損失線路がある。受端を負荷 R_L で終端したところ，下図のような電圧定在波が現れた。次の各種値を求めよ。

(1) 電圧定在波比 ρ　(2) Kの絶対値 $|K|$　(3) 反射係数 K　(4) 負荷 R_L　(5) 電源周波数 f





(1) 図より，電位分布の最大値V_{max}と最小値V_{min}は

$$V_{max}=6[V] \qquad V_{min}=2[V]$$

したがって，電圧定在波比は $\rho=\dfrac{V_{max}}{V_{min}}=\dfrac{6}{2}=3$

(2) 反射係数 K の絶対値 $|K|$（反射係数の大きさ）は

$$|K|=\frac{\rho-1}{\rho+1}=\frac{3-1}{3+1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

例題

(3) 反射係数 K の位相角 θ は　$\theta = \dfrac{4\pi y_1}{\lambda} \pm \pi$

定在波の山と山の距離は $\dfrac{\lambda}{2} = 12[\mathrm{cm}]$ となるため，$\lambda = 24[\mathrm{cm}] = 0.24[\mathrm{m}]$ となる。

一方で，$V_{\min}$になる負荷から最も近い位置 y_1 は 2[cm] = 0.02[m] であるため，

$$\theta = \frac{4\pi y_1}{\lambda} \pm \pi = \frac{4\pi \times 2 \times 10^{-2}}{24 \times 10^{-2}} \pm \pi = \frac{4}{3}\pi,\ -\frac{2}{3}\pi$$

より，

$$K = |K| e^{j\theta} = \frac{1}{2} e^{j\frac{4}{3}\pi},\ \frac{1}{2} e^{-j\frac{2}{3}\pi}$$

---

(4) 反射係数Kと各種抵抗成分の関係より，

$$K = \frac{R_{\mathrm{L}} - R_0}{R_{\mathrm{L}} + R_0}$$

から，

$$R_{\mathrm{L}} = R_0 \frac{1+K}{1-K} = R_0 \frac{1 + \frac{1}{2} e^{j\frac{4}{3}\pi}}{1 - \frac{1}{2} e^{j\frac{4}{3}\pi}} = \frac{300}{7}(3 - j2\sqrt{3})[\Omega]$$

---

(5) 電源の周波数 f は

$$f = \frac{c_0}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8 [\mathrm{m/s}]}{0.24[\mathrm{m}]} = 1.25[\mathrm{GHz}]$$