

12. 伝送線路における電圧・電流

12. Voltage and Current in the Transmission-Line

講義内容

- 1. 伝送線路上の電圧・電流の分布**
- 2. 反射係数**
- 3. 波動の反射と透過**

完全な解と反射係数

伝送線路方程式の完全な解

$$V = V_0 \frac{(Z_L + Z_0)e^{\gamma(l-x)} + (Z_L - Z_0)e^{-\gamma(l-x)}}{(Z_L - Z_0)e^{-\gamma l} + (Z_L + Z_0)e^{\gamma l}} = V_0 e^{-\gamma x} \frac{1 + \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} e^{-2\gamma(l-x)}}{\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} e^{-2\gamma l} + 1}$$

$$\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = K = |K| e^{j\theta}$$

反射係数

極座標表示

反射係数 を用いると,

$$\begin{cases} V = V_0 e^{-\gamma x} \frac{1 + Ke^{-2\gamma(l-x)}}{1 + Ke^{-2\gamma l}} \\ I = \frac{V_0}{Z_0} e^{-\gamma x} \frac{1 - Ke^{-2\gamma(l-x)}}{1 + Ke^{-2\gamma l}} \end{cases}$$

分子に注目

$$1 + Ke^{-2\gamma(l-x)}$$

入射波

同じ場所 x での **入射波** に対する **反射波** の **大きさ**・**位相** の **関係** を表す

反射係数 K
の意味

$|K|$: 終端での反射波の大きさの割合
 θ : 終端での反射波の位相の進み角

反射係数 K の特別な場合

反射係数の定義

$$K = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (0 \leq |K| \leq 1)$$

- **整合負荷** の場合 (インピーダンス整合, インピーダンスマッチング)

$Z_L = Z_0 \Rightarrow K = 0$ … 反射は無く, 入射波は半無限長線路と同様に伝搬

- 終端 **開放** の場合

$Z_L = \infty \Rightarrow K = 1 (\theta = 0)$ … 反射波は入射波と大きさが **等しく**, **同相**

- 終端 **短絡** の場合

$Z_L = 0 \Rightarrow K = -1 (\theta = \pi)$ … 反射波は入射波と大きさが **等しく**, **逆相**

- 負荷が純リアクタンスの場合

$Z_L = jX_L \Rightarrow |K| = 1, \theta = \tan^{-1} \frac{2X_L Z_0}{X_L^2 - Z_0^2}$ … 反射波は入射波と大きさが **等しく**, 位相は **X_L** で決まる

電圧・電流のフェーザ表示

- **整合負荷** の場合 ($Z_L = Z_0$)
入射波と干渉する反射波が存在しない \Rightarrow 単純な **波動伝搬**
- **整合負荷** でない場合 ($Z_L \neq Z_0$)
反射波が存在する \Rightarrow 入射波との **干渉** により **定在波** が形成

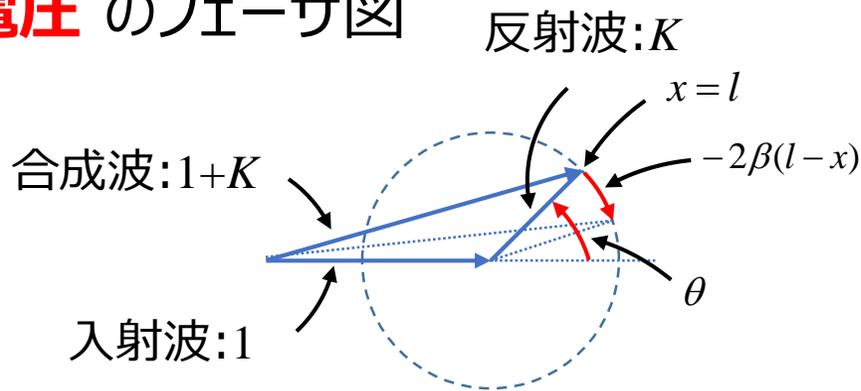
$\Rightarrow 1 + Ke^{-2\gamma(l-x)}$ をフェーザ図で考える (簡単化のため無損失で $\gamma = j\beta$)

$1 + Ke^{-2\gamma(l-x)}$ の第2項の $e^{-2\gamma(l-x)}$ は π から **終端** までの **往復** による **位相変化** を表すので, フェーザ K を x に応じて **回転** させればよい

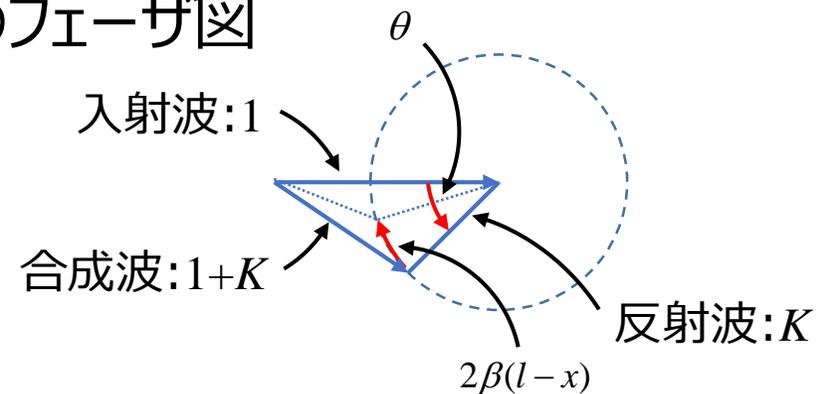
フェーザは3つ

- 入射波 : **1**
- 反射波 : **K**
- 合成波 : **1+K**

電圧 のフェーザ図

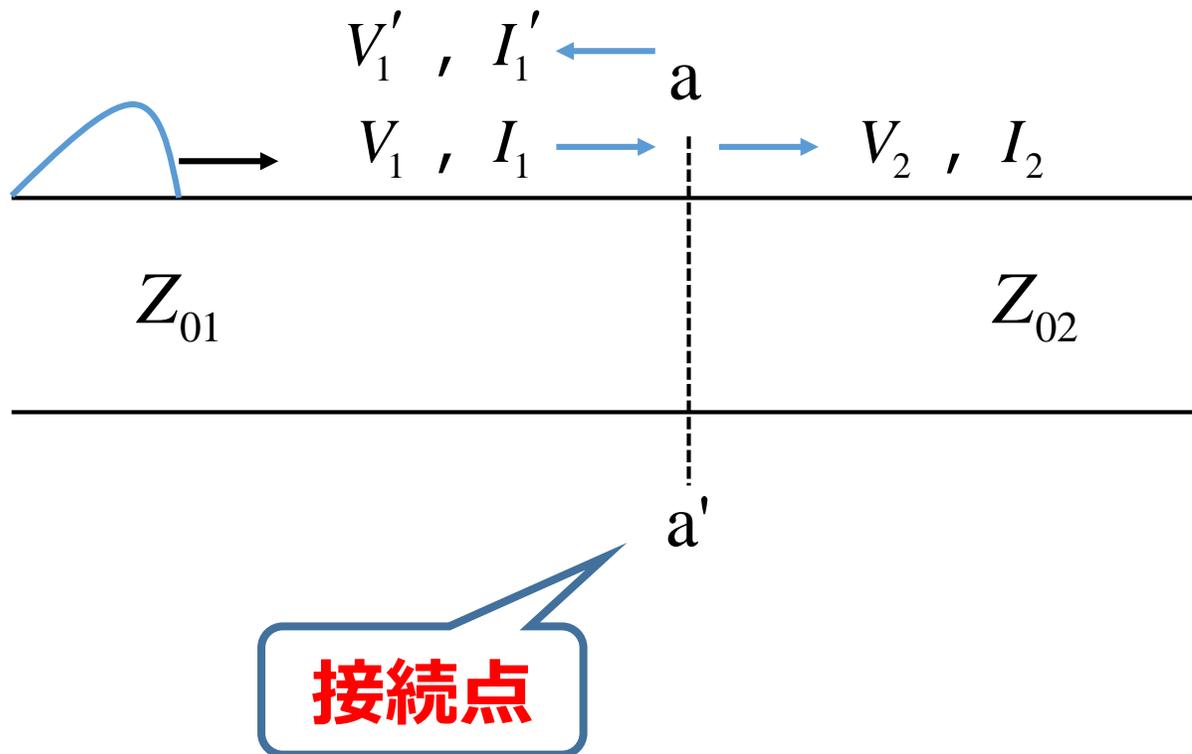


電流 のフェーザ図



波動の反射と透過からみた反射係数

特性 インピーダンスが異なる二つの線路が接続されている伝送線路がある。
この時、線路1の左方から電圧あるいは電流が進行してくる場合を考える



Z_{01}, Z_{02} : 線路の **特性** インピーダンス

各線路における電流波と電圧波は、

- V_1 : **点a** における **入射** 波の電圧
- I_1 : **点a** における **入射** 波の電流
- V_2 : 線路 **2** への **透過** 波の電圧
- I_2 : 線路 **2** への **透過** 波の電流
- V_1' : 線路 **1** への **反射** 波の電圧
- I_1' : 線路 **1** への **反射** 波の電流

波動の反射と透過からみた反射係数

キルヒホッフの **電流** 則(KCL) 及び
キルヒホッフの **電圧** 則(KVL)より,

$$\begin{cases} I_1 = I_1' + I_2 \\ V_1 + V_1' = V_2 \end{cases}$$

接続点aの左方と右方で
電圧が **等しく** なければいけない

また, 各電流と電圧の間には
次の関係式が成立する

$$\begin{cases} V_1 = Z_{01} I_1 \\ V_1' = Z_{01} I_1' \\ V_2 = Z_{02} I_2 \end{cases}$$

入射 波と **反射** 波は線路2を
通過 **しない** . 線路1を通る
透過 波は線路2を通過

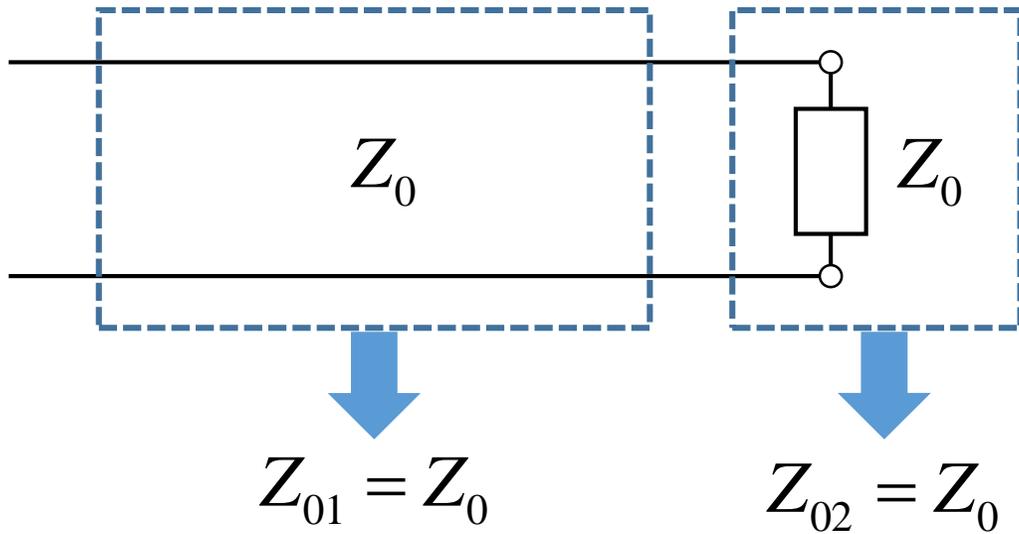
従って, これらの式から, **入射** 波と **反射** 波の関係を求めると, 次のようになる

$$\begin{cases} I_1' = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \cdot I_1 \equiv KI_1 \\ V_1' = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \cdot V_1 \equiv KV_1 \end{cases}$$

K : 反射係数
(reflection Coefficient) $K = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}$

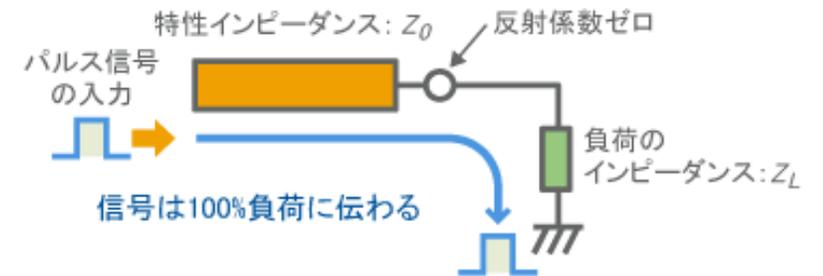
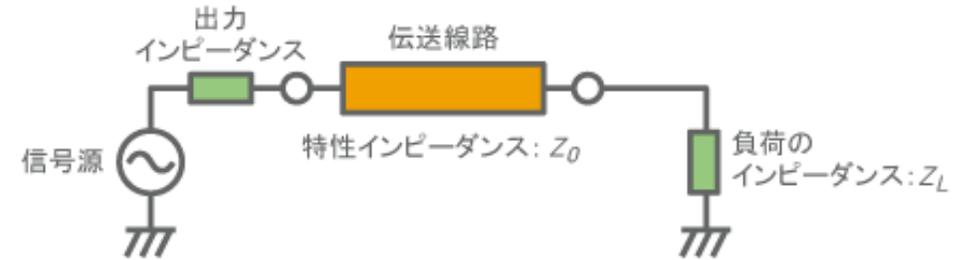
各種負荷で終端：特性インピーダンス Z_0 で終端

- 特性インピーダンス Z_0 で終端した場合



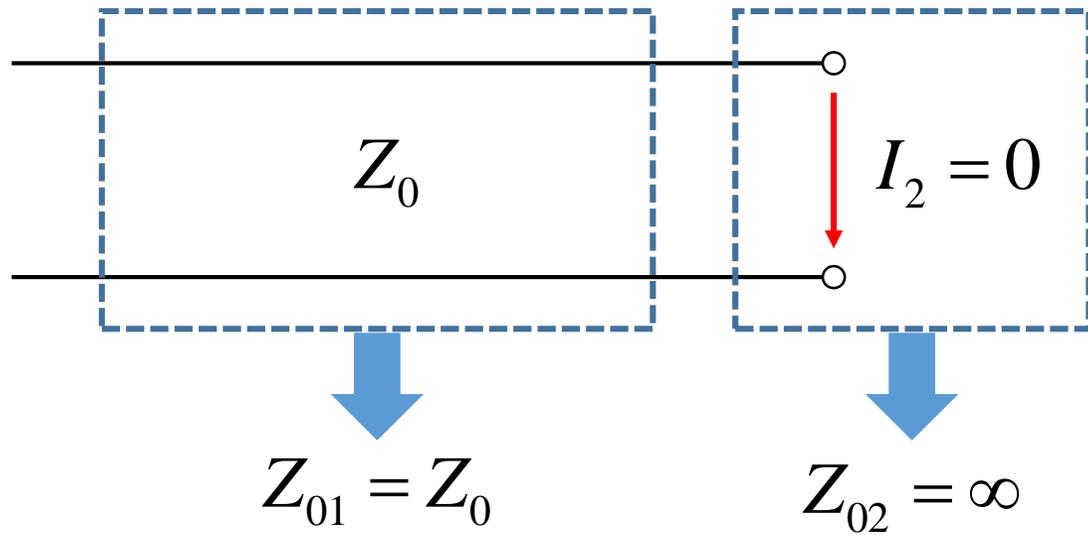
$$\therefore K = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} = \frac{Z_0 - Z_0}{Z_0 + Z_0} = \frac{0}{2Z_0} = 0 \quad (\text{無反射})$$

$$\therefore \begin{cases} I_1' = 0 & , & I_2 = I_1 \\ V_1' = 0 & , & V_2 = V_1 \end{cases}$$



各種負荷で終端：受端開放

- **受端開放** の場合



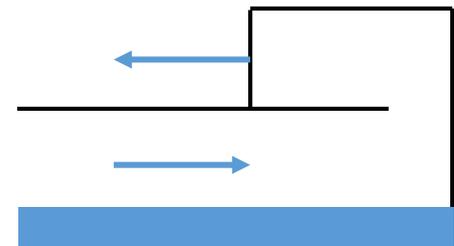
$$\therefore \begin{cases} I_1' = I_1, & I_2 = 0 \\ V_1' = V_1, & V_2 = 2V_1 \end{cases}$$

電流



相殺

電圧

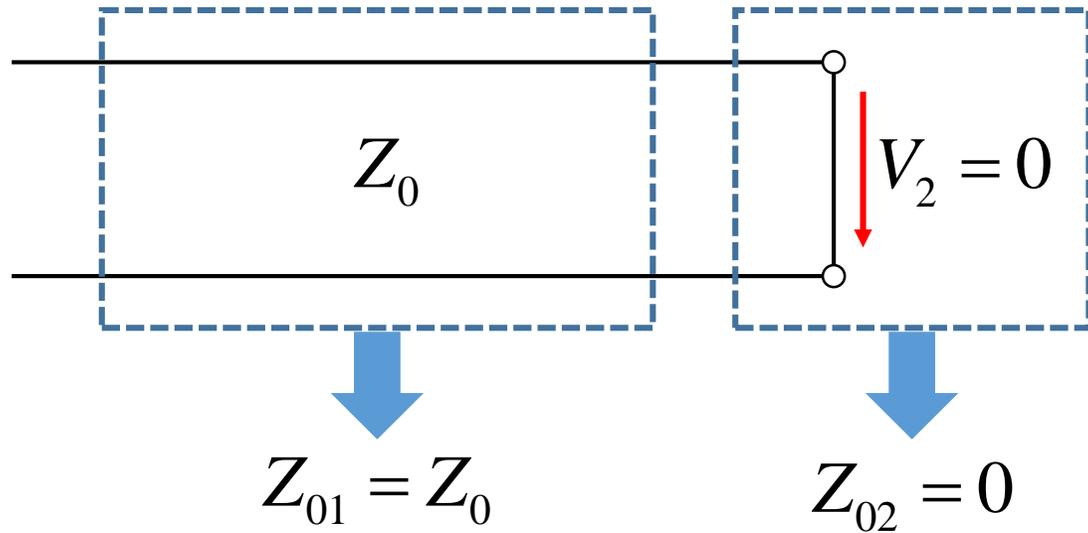


増幅

$$\therefore K = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} = \frac{1 - \frac{Z_{01}}{Z_{02}}}{1 + \frac{Z_{01}}{Z_{02}}} = \frac{1 - \frac{Z_{01}}{\infty}}{1 + \frac{Z_{01}}{\infty}} = 1 \quad (\text{完全反射})$$

各種負荷で終端：受端短絡

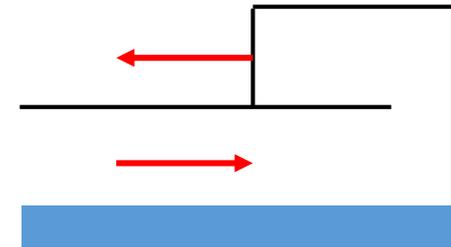
- 受端短絡 の場合



$$\therefore K = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} = \frac{0 - Z_{01}}{0 + Z_{01}} = -1 \quad (\text{完全反射})$$

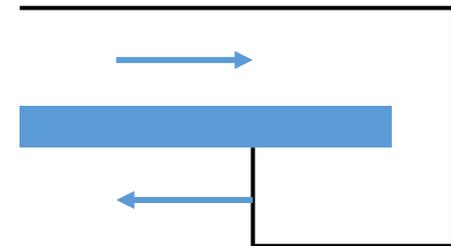
$$\therefore \begin{cases} I_1' = -I_1 & , & I_2 = 2I_1 \\ V_1' = -V_1 & , & V_2 = 0 \end{cases}$$

電流



増幅

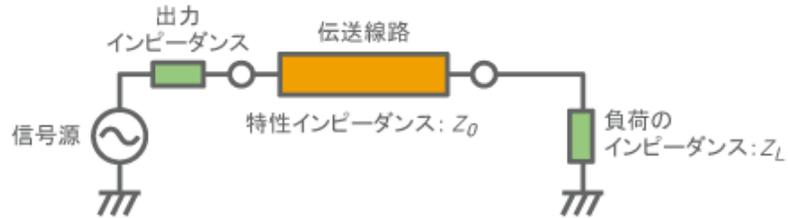
電圧



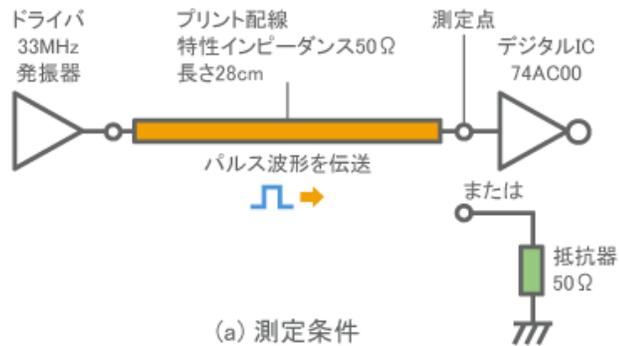
相殺

$V_2 = 0$

インピーダンスマッチング (整合)

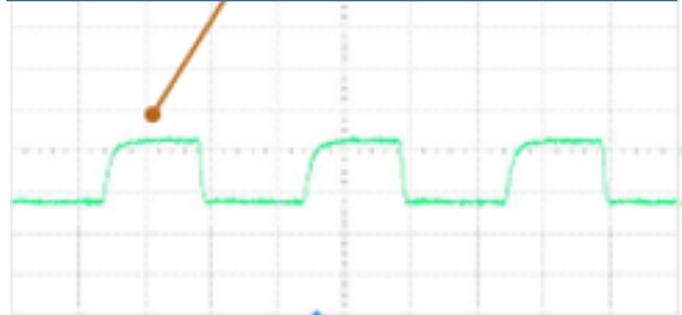


(a) 伝送線路のモデル



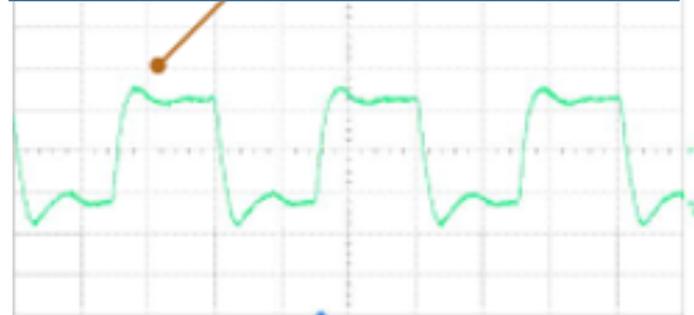
(a) 測定条件

信号振幅が小さく、オーバー/アンダーシュートが発生しない



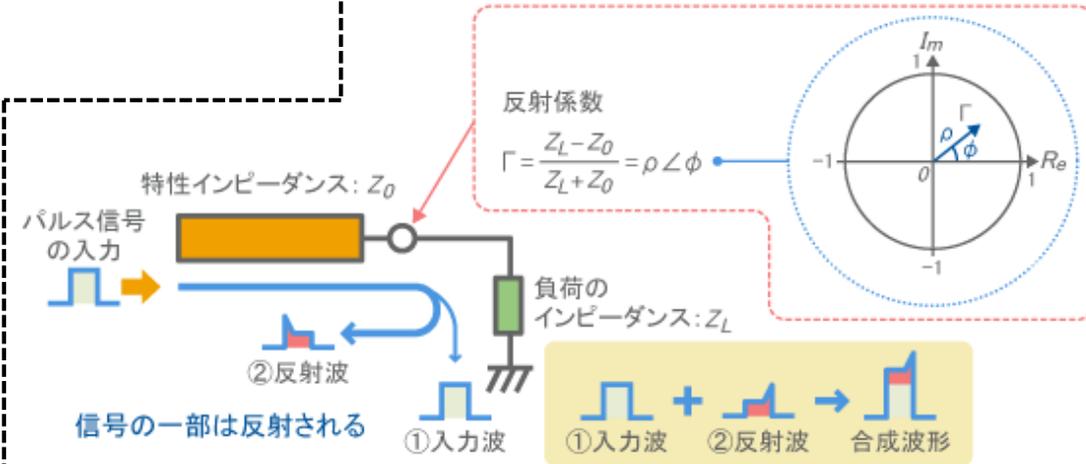
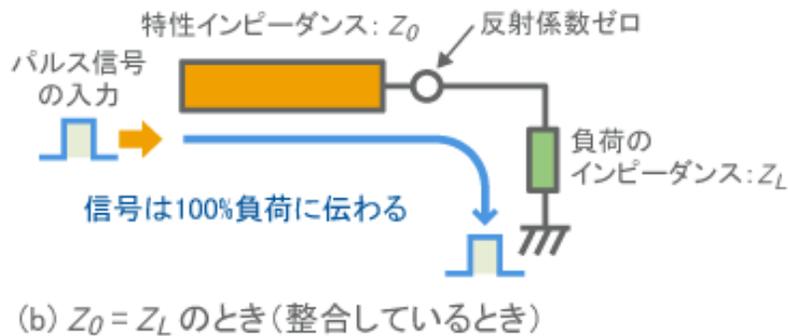
抵抗で終端 ($Z_0 = Z_L$)

信号振幅が大きく、オーバー/アンダーシュートが発生する



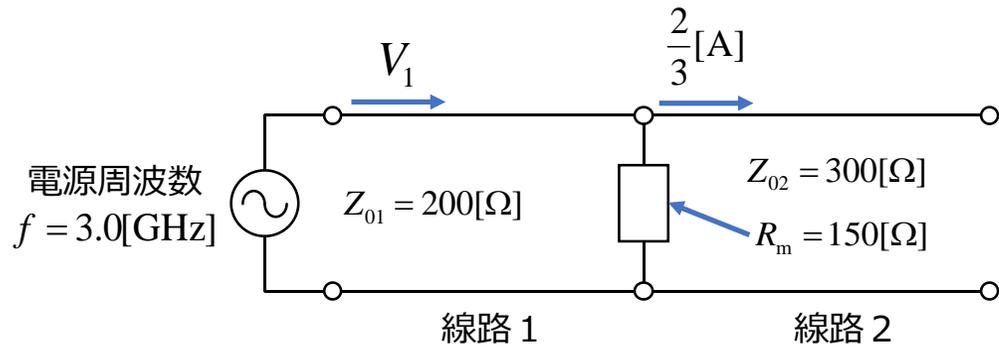
デジタルICで終端

インピーダンス整合をすると測定信号に影響が**無い**!



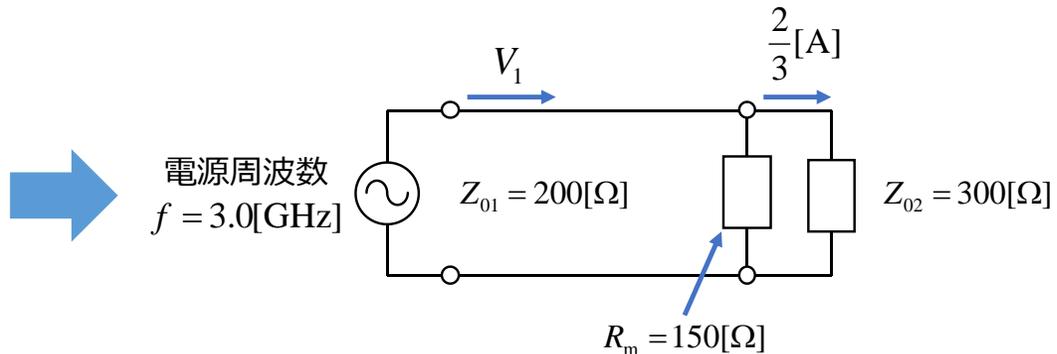
図のように、特性インピーダンス $Z_{01}=200[\Omega]$ の線路1と $Z_{02}=300[\Omega]$ の線路の接続点に抵抗 $R_m=150[\Omega]$ を挿入した。左方から振幅 $|V_1|$ の正弦波が入射するとき、線路2に流れる電流 I_1 の振幅 $|I_1|$ は $2/3[\text{A}]$ であった。次の値を求めよ。ただし、線路は無損失とし、正弦波の周波数 $f=3.0[\text{GHz}]$ 、光速 $c_0=3.0\times 10^8[\text{m/s}]$ とする。

- (1) 反射係数 K (2) 透過電圧 V_2 の振幅 $|V_2|$ (3) 入射電圧 V_1 の振幅 $|V_1|$ (4) 線路1に流れる電流 I_1 の振幅 $|I_1|$
 (5) 線路1の電圧定在波比 ρ (6) 電圧定在波の波長 λ (7) 電圧定在波の谷から谷の距離 p



(1) 図の等価回路は以下の通りになるため、

$$K = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{\frac{R_m Z_{02}}{R_m + Z_{02}} - Z_{01}}{\frac{R_m Z_{02}}{R_m + Z_{02}} + Z_{01}} = \frac{\frac{150 \times 300}{150 + 300} - 200}{\frac{150 \times 300}{150 + 300} + 200} = \frac{100 - 200}{100 + 200} = -\frac{1}{3}$$



(2) 透過電圧 V_2 の振幅 $|V_2|$ は

$$|V_2| = |I| Z_{02} = \frac{2}{3} \times 300 = 200[\text{V}]$$

(3) 透過電圧 V_2 は入力電圧 V_1 の入射波と反射波の合成なので, $V_2 = (1+K)V_1$ より, $|V_1| = \frac{|V_2|}{1+K} = \frac{200}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \times 200 = 300[\text{V}]$

(4) 線路1に流れる電流 I_1 の振幅 $|I_1|$ は入力電圧 V_1 と線路1の特性インピーダンス Z_{01} の大きさ $|Z_{01}|$ の関係より, $|I_1| = \frac{|V_1|}{|Z_{01}|} = \frac{300}{200} = \frac{3}{2}[\text{A}]$

(5) 線路1の電圧定在波比 ρ は $\rho = \frac{1+|K|}{1-|K|} = \frac{1+\left|-\frac{1}{3}\right|}{1-\left|-\frac{1}{3}\right|} = \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3+1}{3-1} = 2$

(6) 伝送線路上における電圧定在波の波長 λ は

$$\lambda = \frac{c_0}{f} = \frac{3 \times 10^8}{3 \times 10^9} = 0.1[\text{m}]$$

(7) (6)より, 電圧定在波の谷から谷までの距離 p は波長 λ の半分なので,

$$p = \frac{\lambda}{2} = \frac{0.1}{2} = 0.05[\text{m}] = 5[\text{cm}]$$