

13. 伝送線路のインピーダンス

13. Impedance of the Transmission-Line

講義内容

1. 負荷インピーダンスの規格化
2. スミス図（スミスチャート）
3. 送端インピーダンス

反射係数と特性／終端負荷インピーダンスの関係

反射係数 K と特性インピーダンス（純抵抗） R_0 と終端負荷インピーダンス Z_L の関係

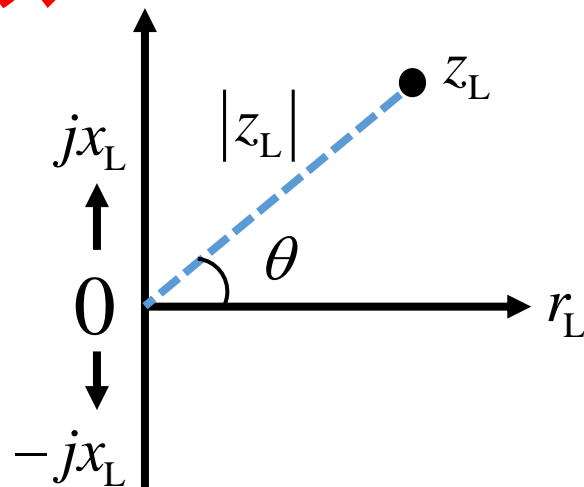
$$K = |K|e^{j\theta} = \frac{Z_L - R_0}{Z_L + R_0}$$

右辺の分子・分母を R_0 で割ると、

$$K = |K|e^{j\theta} = \frac{\frac{Z_L}{R_0} - 1}{\frac{Z_L}{R_0} + 1} = \frac{z_L - 1}{z_L + 1}$$

規格化負荷インピーダンス

$$z_L = \frac{Z_L}{R_0} = r_L + jx_L$$



複素平面（ガウス平面）におけるベクトル

反射係数と規格化負荷インピーダンスの関係

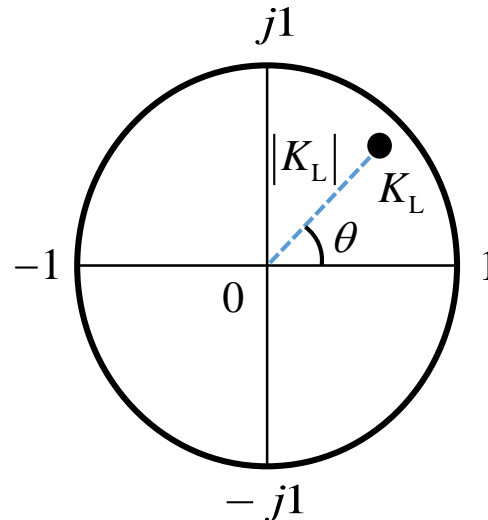
反射係数 K と規格化負荷インピーダンス z_L の関係

- z_L が純虚数の場合： K は常に **大きさ1**
 K 面では **半径1** の **円** に対応（単位円）
- z_L が実数（純抵抗）の場合： K は常に **実数**，値は-1から1で変化
 K 面では **-1** から **1** の **実軸** に対応

z_L 面の K 面への写像



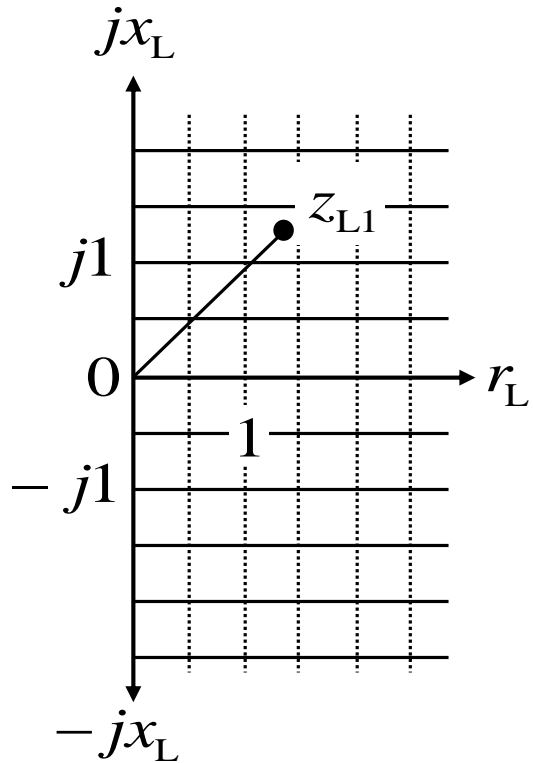
半径1の単位円内の1点



K 面：**反射係数** 面

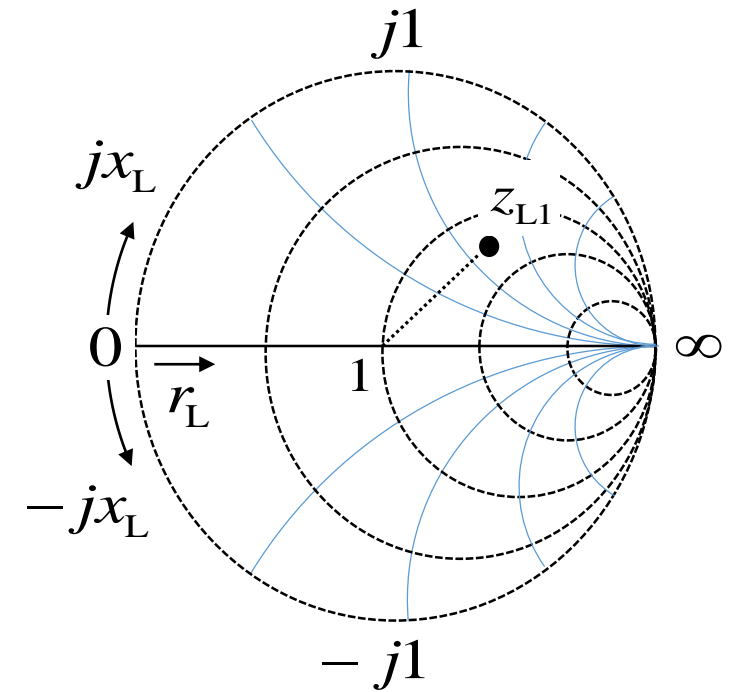
スミス図 (スミスチャート)

反射係数面上に規格化インピーダンス等位線を記入 ⇒ **スミス図 (スミスチャート)**



規格化インピーダンス面上の
グリッド を **反射係数** 面へ **写像**
(**双一次** 変換)

2種類の円群が形成
破線：実数軸上のグリッド
実線：虚数軸上のグリッド



反射係数面 (K面)

規格化インピーダンス図

実軸上 **1** の点が **反射係数** の **原点**

原点からの **距離** : **大きさ**
正実軸 からの **角度** : **位相角**

送端インピーダンス ～一般の場合～

送端インピーダンス Z_s … 送端 ($x=0$: 電源側) における電圧と電流の比

$$Z_s = \frac{V}{I} \Big|_{x=0} = \frac{V_0 e^{-\gamma x} \frac{1 + Ke^{-2\gamma(l-x)}}{1 + Ke^{-2\gamma l}}}{\frac{V_0}{Z_0} e^{-\gamma x} \frac{1 - Ke^{-2\gamma(l-x)}}{1 + Ke^{-2\gamma l}}} = Z_0 \frac{1 + |K| e^{-2\alpha l} e^{j(\theta - 2\beta l)}}{1 - |K| e^{-2\alpha l} e^{j(\theta - 2\beta l)}}$$

送端 インピーダンスと **反射係数** の関係

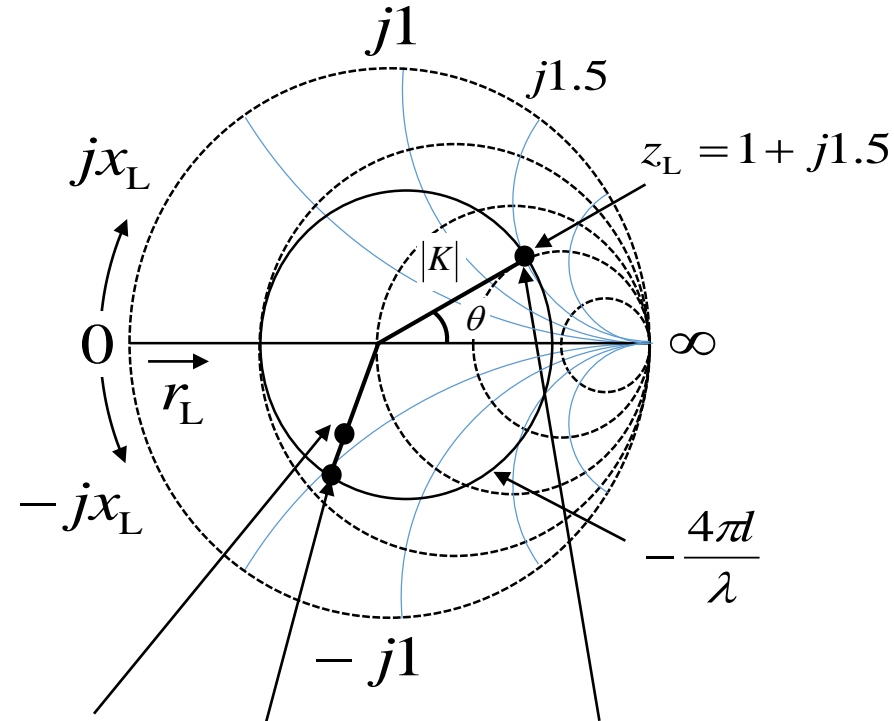
$$\frac{Z_s}{Z_0} \equiv \frac{1 + |K| e^{-2\alpha l} e^{j(\theta - 2\beta l)}}{1 - |K| e^{-2\alpha l} e^{j(\theta - 2\beta l)}}$$

$$|K| e^{-2\alpha l} e^{j(\theta - 2\beta l)} = \frac{z_s - 1}{z_s + 1}$$

$|K| e^{j\theta} = \frac{z_L - 1}{z_L + 1}$ と同形なので

反射係数面上で z_L の点を **$2\beta l$ 時計回りに回転** させて **α に応じた減衰** を与えると z_s となる

⇒ **スミス図** により z_s が容易にわかる!



規格化 **送端** インピーダンス (減衰 **考慮**)

規格化 **負荷** インピーダンス

規格化 **送端** インピーダンス (減衰 **非考慮**)

送端インピーダンス ～終端開放・無損失～

終端開放の無損失線路

$$Z_L = \infty, Z_0 = R_0 \Rightarrow K = 1 \text{ より}$$

$$Z_s = R_0 \frac{1 + e^{-j2\beta l}}{1 - e^{-j2\beta l}} = R_0 \frac{1 + \cos 2\beta l - j \sin 2\beta l}{1 - \cos 2\beta l + j \sin 2\beta l} = R_0 \frac{-j \sin 2\beta l}{1 - \cos 2\beta l} = -jR_0 \cot \beta l = \boxed{-jR_0 \cot \frac{2\pi l}{\lambda}}$$

純虚数

• 線路長 l に対する Z_s の変化

$$2n\lambda/4 < l < (2n+1)\lambda/4 \Rightarrow Z_s < 0 : \text{容量性}$$

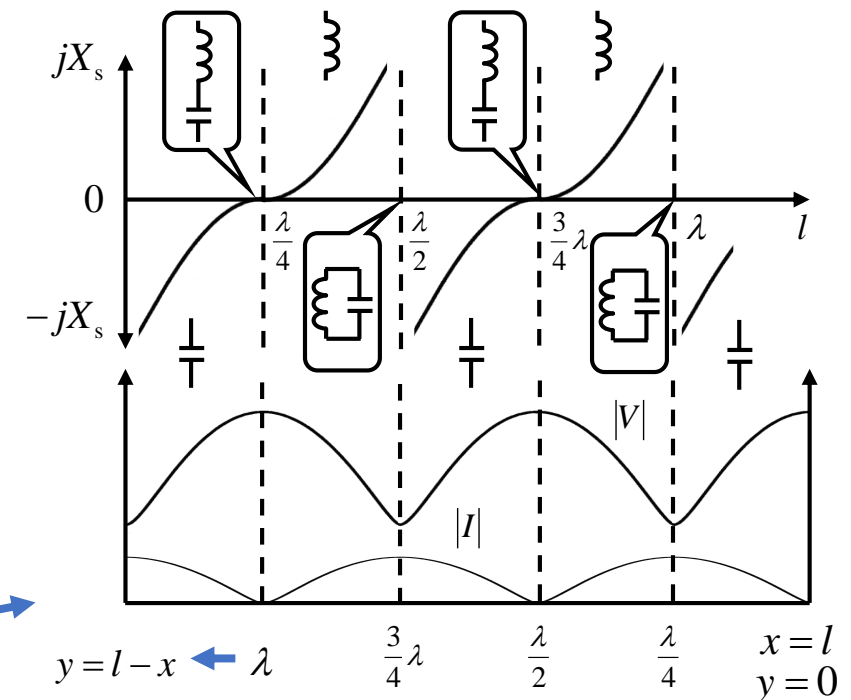
$$l = (2n+1)\lambda/4 \Rightarrow Z_s = 0 : \text{共振}$$

$$(2n+1)\lambda/4 < l < (2n+2)\lambda/4 \Rightarrow Z_s > 0 : \text{誘導性}$$

$$l = (2n+2)\lambda/4 \Rightarrow Z_s = \infty : \text{反共振}$$

• 線路上の電圧・電流の分布

スミス図 もしくは フェーザ図 よりわかる



送端インピーダンス ～終端短絡・無損失～

終端短絡の無損失線路

$$Z_L = 0, Z_0 = R_0 \Rightarrow K = -1 \text{ より}$$

$$Z_s = R_0 \frac{1 - e^{-j2\beta l}}{1 + e^{-j2\beta l}} = jR_0 \frac{\sin 2\beta l}{1 + \cos 2\beta l} = \boxed{jR_0 \tan \frac{2\pi l}{\lambda}}$$

純虚数

- 線路長 l に対する Z_s の変化

$$2n\lambda/4 < l < (2n+1)\lambda/4 \Rightarrow Z_s > 0 : \text{誘導性}$$

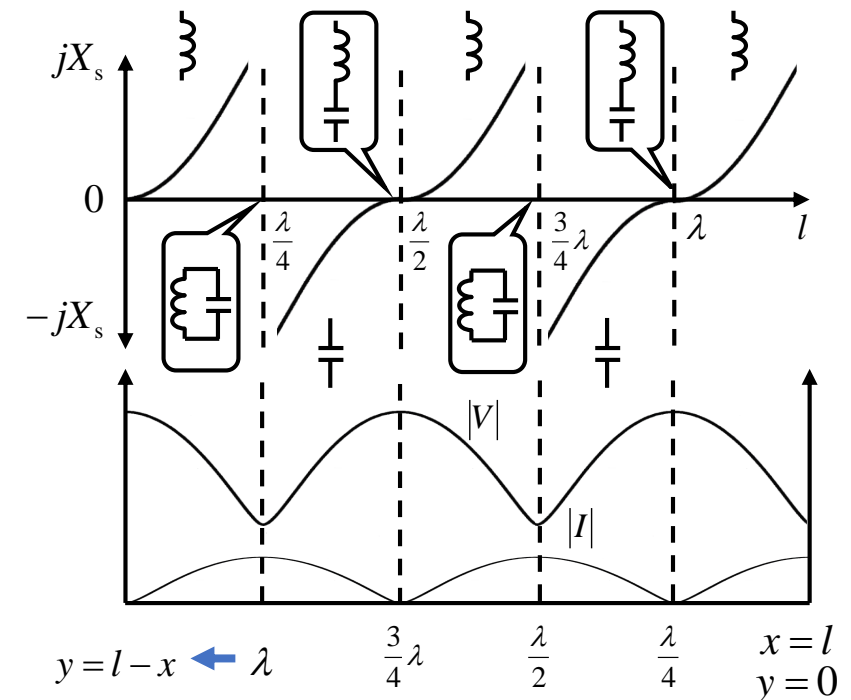
$$l = (2n+1)\lambda/4 \Rightarrow Z_s = \infty : \text{反共振}$$

$$(2n+1)\lambda/4 < l < (2n+2)\lambda/4 \Rightarrow Z_s < 0 : \text{容量性}$$

$$l = (2n+2)\lambda/4 \Rightarrow Z_s = 0 : \text{共振}$$

- 線路上の電圧・電流の分布

スミス図 もしくは **フェーザ図** よりわかる



送端インピーダンス ～その他の特別な場合～

線路長が **半波長の整数倍** のとき

$$l = \frac{n\lambda}{2} \text{ より } 2\beta l = 2\beta \frac{n\lambda}{2} = 2 \frac{2\pi}{\lambda} \frac{n\lambda}{2} = 2\pi n [\text{rad}]$$

$$\Rightarrow e^{-j2\beta l} = \cos 2\beta l - j \sin 2\beta l = \cos 2\pi n - j \sin 2\pi n = 1 \Rightarrow Z_s = R_0 \frac{1+K}{1-K} = Z_L$$

半波長インピーダンス整合

線路長が **1/4波長の奇数倍** のとき

$$l = \frac{(2m+1)\lambda}{4} \text{ より } 2\beta l = 2\beta \frac{(2m+1)\lambda}{4} = 2 \frac{2\pi}{\lambda} \frac{(2m+1)\lambda}{4} = (2m+1)\pi [\text{rad}]$$

$$\Rightarrow e^{-j2\beta l} = e^{-j(2m+1)\pi} = \cos(2m+1)\pi - j \sin(2m+1)\pi = -1 \Rightarrow Z_s = R_0 \frac{1-K}{1+K} = \frac{R_0^2}{Z_L}$$

開放短絡インピーダンス

$$\text{終端開放時: } Z_{so} = Z_0 \frac{1+e^{-j2\gamma l}}{1-e^{-j2\gamma l}}$$

$$\text{終端短絡時: } Z_{ss} = Z_0 \frac{1-e^{-j2\gamma l}}{1+e^{-j2\gamma l}}$$

両者の積 $Z_{so} Z_{ss} = Z_0^2$

$$\Rightarrow Z_0 = \sqrt{Z_{so} Z_{ss}} = R_0 + jX_0$$

$\Rightarrow Z_{so}$ と Z_{ss} から Z_0 がわかる

送端 インピーダンスは
終端 の **逆数** に **比例**