17. 過渡現象と回路方程式
17. Transient Phenomena and Circuit Equations

講義内容

1. 定常状態と過渡現象
2. 回路方程式とその解法
3. LR回路，CR回路

定常状態と過渡現象（定常時と過渡時）

<u>定常状態</u>　これまで学んだ直流・交流回路理論（集中定数回路）
電気回路が **一定条件下** に **十分長時間** 置かれた場合，
回路内部の電圧・電流は一定の状態となる　⇒ **定常** 状態

<u>**過渡現象**</u>　電気回路内の スイッチの開閉時 ， 回路素子の値が変化する場合
⇒ <u>**定常状態から別の状態に移行（エネルギーの増減・変換・消散）**</u>
この過程を **過渡現象** という

●ポイント

インダクタンス	（L）	：流れる **電流** は急変しない（逆起電力発生のため）
キャパシタンス	（C）	：両端の **電圧** は急変しない（電荷を蓄える為）
抵抗	（R）	：変化に **従順**（エネルギー蓄積素子ではないため）

過渡現象の解析法

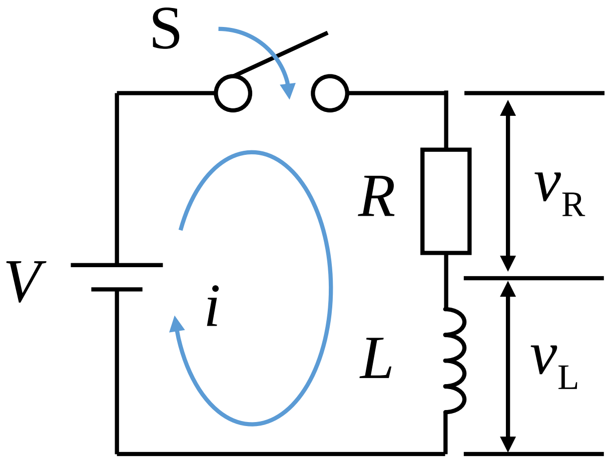
①	**初等的解法**	：回路方程式を **直接** 解く方法
②	**ラプラス変換法**	：ラプラス変換により **代数的** に解く方法
③	**モード解析法**	：回路の **物理的意味を考慮** して解く方法

①初等的解法（RL回路I）

電圧印加時（$t = 0$でスイッチ S をON）に流れる電流 i を求める

線形 **非斉次**
微分方程式

回路より $v_L(t) + v_R(t) = V$ $\xrightarrow{\text{電流で表現}}$ $L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V$



1）**定常解**（**直流解**）$i(t) = I_s$

十分時間が経過したときの電流 … 一定値
（時間的変化（傾き）が存在しない）

$\dfrac{di(t)}{dt} = 0$ より，$i(t) = I_s = \dfrac{V}{R}$

2）**過渡解** $i(t) = i_t(t)$

※**斉次** 方程式 = **同次** 方程式

過渡時にのみ存在する電流 … 時間変化

回路方程式 の【 **左辺 = 0** 】として解が得られる（ 線形 **斉次** 微分方程式 の **一般解** ）

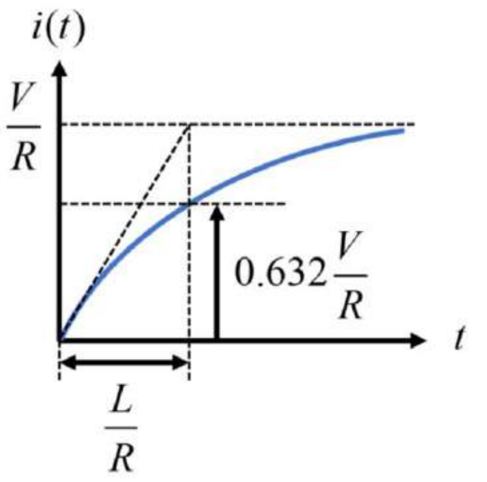
$L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0$ $\xrightarrow{\text{数学的に解く}}$ $i(t) = i_t(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$ （Aは積分定数）

①初等的解法（*RL*回路I）

3）**一般解**　$i(t)$

定常解 I_s と過渡解 $i_t(t)$ の **和**
（ 線形 **非斉次** 微分方程式 の **一般解** ）

$$i(t) = I_s + i_t(t) = \frac{V}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}$$



4）**積分定数**　A

初期条件（$i(0) = 0$）から求める

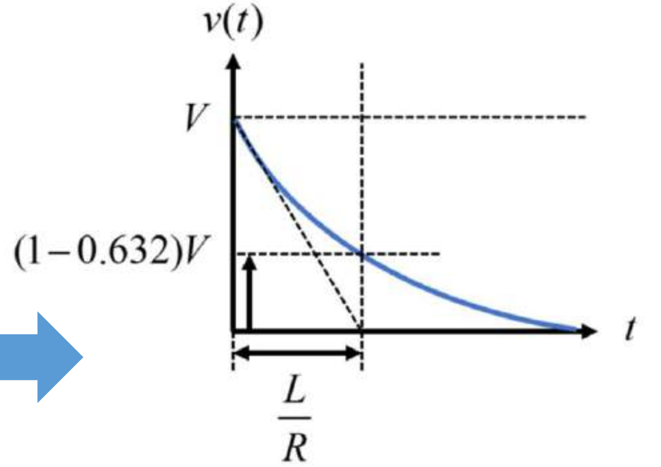
$$i(0) = \frac{V}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}0} = \frac{V}{R} + A = 0 \longrightarrow A = -\frac{V}{R}$$

以上より

⇒電圧印加時に流れる電流 $i(t)$ は，
（微分方程式の **特殊解** ）

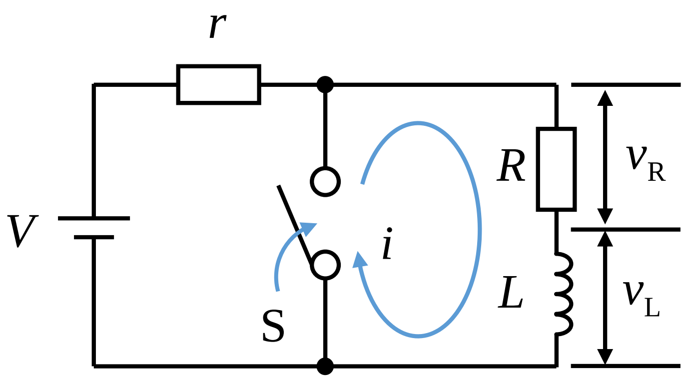
$$\longrightarrow \quad i(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

⇒Lの端子電圧 $v_L(t)$ は，　$v_L(t) = L\dfrac{di(t)}{dt} = Ve^{-\frac{R}{L}t}$



①初等的解法（*RL*回路II）

回路短絡時（$t = 0$でスイッチ S をON）に流れる電流 i を求める

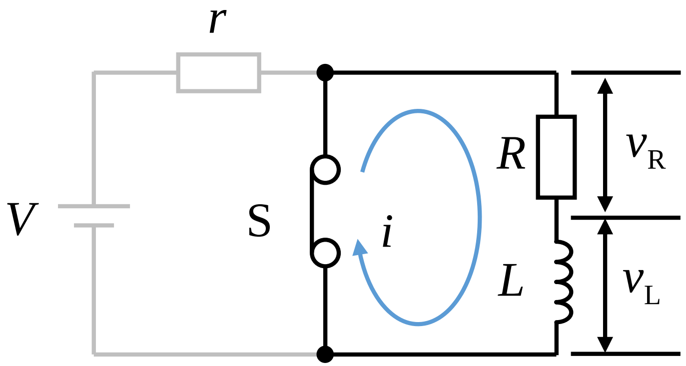


- スイッチオフの状態…**定常** 状態（※定常解ではない！）

  → 回路を流れる電流 I は　$I = \dfrac{V}{r+R}$

- スイッチオンの状態…**過渡** 現象

  L のエネルギーが **消費されるまで持続**



短絡後の回路方程式は　$L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0$　なので

1）定常解　$I_s = 0$

2）過渡解　$i_t(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$

3）一般解　$i(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$

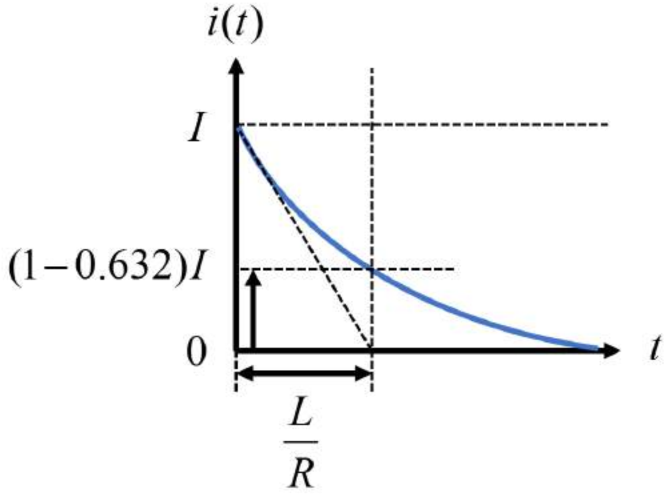
4）積分定数A：初期条件より，$A = I$

以上より

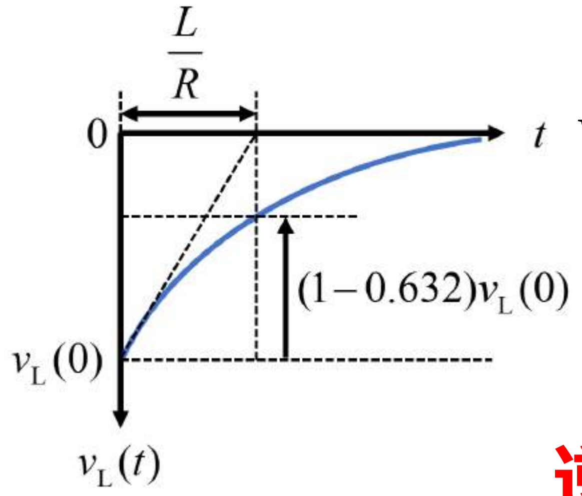
⇒回路短絡時に流れる電流 $i(t)$ は　$i(t) = Ie^{-\frac{R}{L}t}$

⇒*L*の端子電圧$v_L(t)$は　$v_L(t) = -\dfrac{R}{r+R}Ve^{-\frac{R}{L}t}$

①初等的解法（*RL*回路II）



$$i(t) = Ie^{-\frac{R}{L}t}$$



$$v_{\mathrm{L}}(t) = -\frac{R}{r+R}Ve^{-\frac{R}{L}t}$$

逆起電力 が発生

抵抗 R で消費されるエネルギーは？

$$W = \int_0^\infty R\cdot i(t)^2 dt = \frac{1}{2}LI^2$$

代入

$$i(t) = Ie^{-\frac{R}{L}t}$$

L に蓄えられていた **電磁** エネルギーが
全て **熱** エネルギーWに **変換**

時定数

時定数･･･ 過渡電流・過渡電圧の時間変化の指標
解の指数係数の逆数で $\boldsymbol{\tau}$ （ **タウ** ）と表記
時間の次元をもつので単位は [**s**] → RL回路の場合 $\tau = \dfrac{L}{R}$

時定数からわかること

RL 回路で電圧印加時に流れる電流 $i(t) = I(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$ →(規格化) $\dfrac{i(t)}{I} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$

t = 0 での接線の ***i / I*** が 1 となる時間 ⇒ $\boldsymbol{\tau}$

$t = \tau$ での電流値 $i(\tau) = I(1 - e^{-1}) \simeq 0.632I$ ⇒ 最終値の約 **63** % (**0.632**)

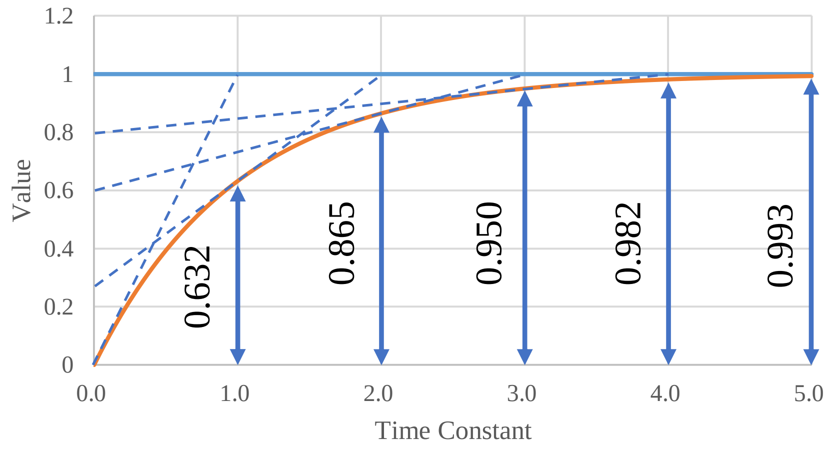
↓ グラフ

$t = \tau$ での接線の ***i / I*** が 1 となる時間 ⇒ $2\boldsymbol{\tau}$

⇒ グラフの **接線** から ***i / I*** が **1** となる時間は常に $\boldsymbol{\tau}$

$t = 5\tau$ での電流値 ⇒ 約99.3%

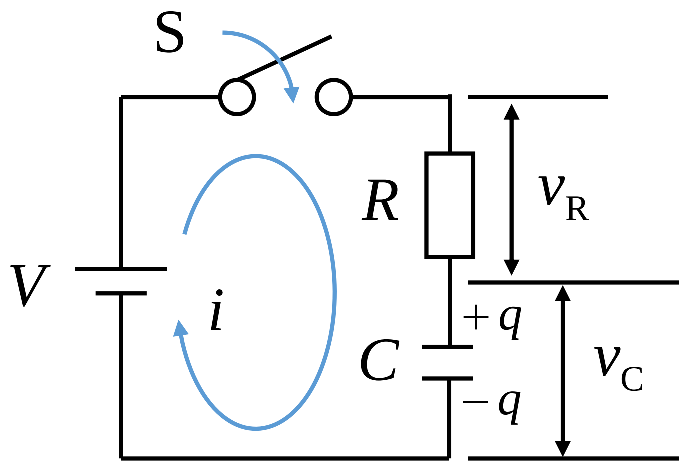
⇒ 5τ 経過すると，ほぼ **定常状態** といえる



CR回路I ：電圧印加時

電圧印加時（$t=0$でスイッチ S をON）の **過渡** 電圧／電流を求める

※キャパシタンス C の初期電圧 $v_C(0)=0$ とする



回路方程式は $v_R(t)+v_C(t)=Ri(t)+v_C(t)=V$

回路を流れる電流 i と C の端子電圧 $v_C(t)$ の関係 $i(t)=C\dfrac{dv_C(t)}{dt}$

C の端子電圧に関する **回路方程式** は $\boxed{RC\dfrac{dv_C(t)}{dt}+v_C(t)=V}$

これを解けば全ての **過渡** 電圧／電流が求まる

別のアプローチ

電流に関する回路方程式を解く方法 $\boxed{Ri(t)+\dfrac{1}{C}\int_0^t i(t)dt=V}$

これらでも **解ける**

C に蓄積される電荷量に関する回路方程式を解く方法

$v_C(t)=\dfrac{q(t)}{C} \rightarrow C\dfrac{dv_C(t)}{dt}=\dfrac{dq(t)}{dt}=i(t)$ より $\boxed{RC\dfrac{dq(t)}{dt}+q(t)=CV}$

CR回路I ：電圧印加時

回路方程式： $RC\dfrac{dv_C(t)}{dt}+v_C(t)=V$

1）定常解V_{Cs}：時間変化 **なし**

$$\frac{dv_C(t)}{dt}=0 \quad \text{より,} \quad V_{Cs}=V$$

2）過渡解$v_{Ct}(t)$：回路方程式の【 **左辺 = 0** 】

$$RC\frac{dv_{Ct}(t)}{dt}+v_{Ct}(t)=0 \quad \text{より,} \quad v_{Ct}(t)=Ae^{-\frac{1}{CR}t}$$

3）一般解$v_C(t)$：**定常解** V_{Cs}と **過渡解** $v_{Ct}(t)$ の **和**

$$v_C(t)=V_{Cs}+v_{Ct}(t)=V+Ae^{-\frac{1}{CR}t}$$

4）積分定数A：**初期条件**（$v_C(0)=0$）

$$v_C(0)=V+Ae^{-\frac{1}{CR}0}=0 \quad \text{より,} \quad A=-V$$

以上より，電圧印加時の

C の端子電圧 $v_C(t)$（ **特殊解** ）は

$$v_C(t)=V(1-e^{-\frac{1}{CR}t})$$

電流 $i(t)$ は

$$i(t)=C\frac{dv_C(t)}{dt}=\frac{V}{R}e^{-\frac{1}{CR}t}$$

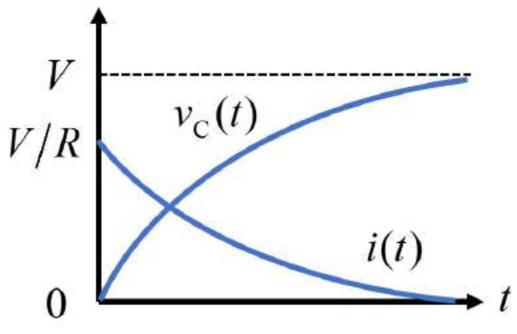
電荷量 $q(t)$ は

$$q(t)=Cv_C(t)=CV(1-e^{-\frac{1}{CR}t})$$

R の端子電圧$v_R(t)$は

$$v_R(t)=Ri(t)=Ve^{-\frac{1}{CR}t}$$

CR回路I：電圧印加時

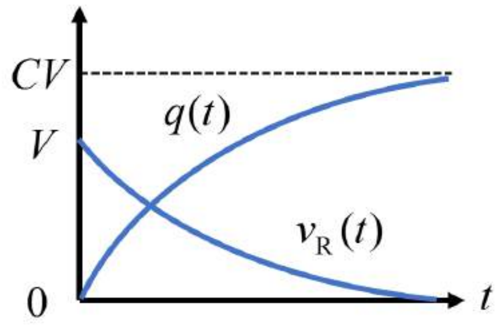


$$v_C(t) = V(1 - e^{-\frac{1}{CR}t})$$

指数関数的に **増加**

$$i(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{V}{R}e^{-\frac{1}{CR}t}$$

指数関数的に **減少**



$$q(t) = Cv_C(t) = CV(1 - e^{-\frac{1}{CR}t})$$

指数関数的に **増加**

$$v_R(t) = Ri(t) = Ve^{-\frac{1}{CR}t}$$

指数関数的に **減少**

時定数　$\tau = CR$

時定数 τ の値が大きいほどコンデンサの **充電** に **時間を要する** ことを意味する

Rが **大** → 電流が **小**

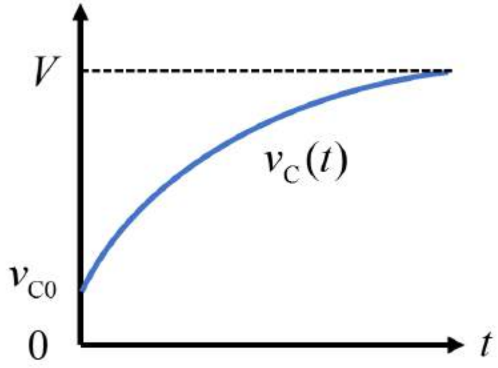
Cが **大** → 電荷の入れ物が **大**

→ 充電時間が **長くなる**

Cが **初期電荷**（**初期電圧**）を持つ場合

初期条件（$v_C(0) = v_{C0}$）より，　$A = -(V - v_{C0})$

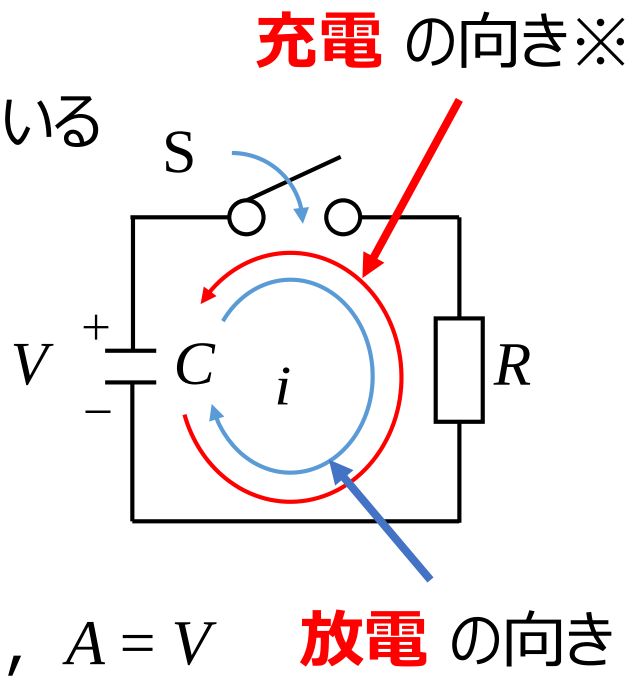
$$\longrightarrow \quad v_C(t) = V - (V - v_{C0})e^{-\frac{1}{CR}t}$$



CR回路II ：回路短絡時（※充電：C に入力）

電圧印加時（$t=0$でスイッチ S をON）の **過渡** 電圧／電流を求める

スイッチを入れる直前($t=\mathbf{0_-}$) ：　コンデンサ C に電圧 V で **充電** されている
スイッチを入れた直後($t=\mathbf{0_+}$) ：　抵抗 R で **放電**



短絡後の回路方程式は　$RC\dfrac{dv_C(t)}{dt}+v_C(t)=0$　なので

1）定常解　$V_{Cs}=0$

2）過渡解　$v_{Ct}(t)=Ae^{-\frac{1}{CR}t}$

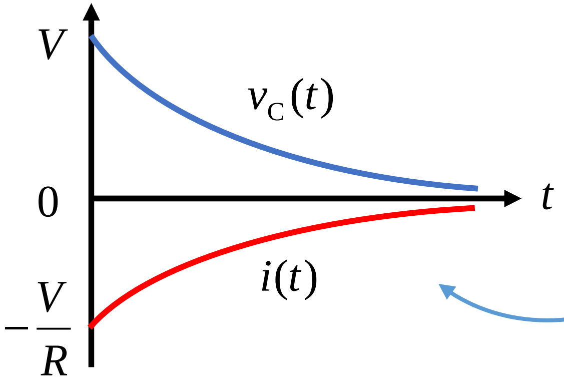
3）一般解　$v_C(t)=Ae^{-\frac{1}{CR}t}$

4）積分定数 A：初期条件より，$A=V$

以上より，回路短絡時の

⇒ Cの端子電圧 $V_C(t)$ は　$v_C(t)=Ve^{-\frac{1}{CR}t}$

⇒ 電流 $i(t)$ は　$i(t)=C\dfrac{dv_C(t)}{dt}=-\dfrac{V}{R}e^{-\frac{1}{CR}t}$



キャパシタに **充電** する
向きを **正** とするので
放電 時 は **負** に流れる

CR回路II ：定常時① ⇒ 過渡時 ⇒ 定常時②の移行

電圧印加時（$t=0$でスイッチ S をON）の **過渡** 電圧／電流を求める

定常時①：　スイッチを入れる直前($t=\mathbf{0_-}$)：コンデンサ C に電圧 V で **充電** されている
過渡時：　スイッチを入れた直後($t=\mathbf{0_+}$)：抵抗 R で **放電**
定常時②：　スイッチを入れて十分時間経過：コンデンサ C に蓄えられていた電荷が無くなる

∴　$t=0$ よりも **前** の状態も考慮して波形を図示する