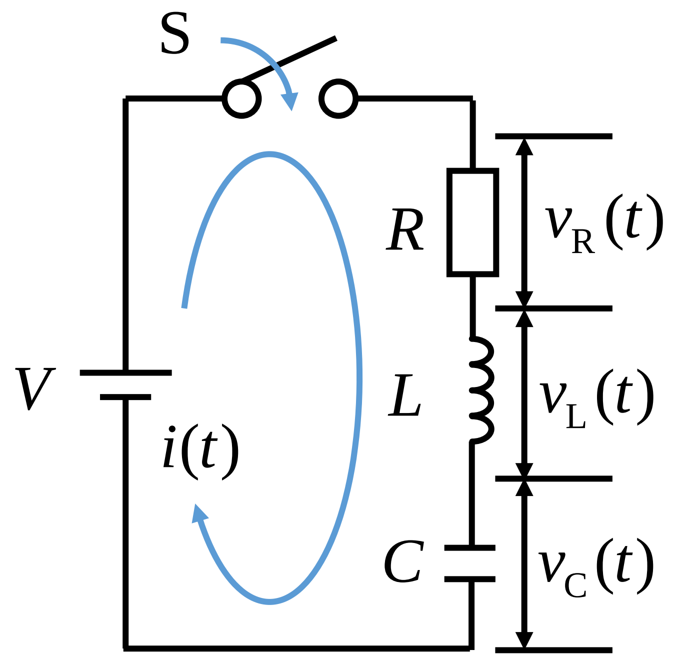
18. RLC回路

18. RLC Circuit

講義内容

1. RLC回路の微分方程式
2. 過減衰，臨界減衰，不足減衰
3. 非減衰，発振

RLC 回路の微分方程式



条件

$v_C(0) = 0$
$t = 0$ で S = ON

KVL より， $v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) = V$

微積分方程式に変形すると，

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = V$$

両辺を微分して，

$$L\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = 0$$

１）**定常解**（**直流解**） $i(t) = I_s$

十分時間が経過したときの電流 … 一定値

（時間的変化（傾き）が存在しない）

右辺がゼロなので， $i(t) = I_s = 0$

過渡解の特性方程式

2）**過渡解**　$i(t) = i_t(t)$

過渡時にのみ存在する電流 … 時間変化

回路方程式 の【 **左辺 ＝ 0** 】として解が得られる（ 線形 **斉次** 微分方程式 の **一般解** ）

$$L\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = 0 \longrightarrow L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0$$

特性 方程式

解の公式を用いて，

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}}{2L} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \lambda_1, \lambda_2$$

根号（ルート）内の符号により，**3つ** のパターンが存在する

[1] $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$　　[2] $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$　　[3] $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$

減衰係数と共振周波数を用いた表現

ここで，[2]の式を変形すると，

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \rightarrow \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = 1 \rightarrow \zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

とおくと，

$$\boxed{\zeta = 1}$$

ζ：**減衰係数**

減衰係数 をもちいて各パターンを同様に表現すると，

[1] $\zeta > 1$　　[2] $\zeta = 1$　　[3] $\zeta < 1$

LC共振 回路における
共振 周波数 ω_n を用いると，

$$\boxed{\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

$$\rightarrow \lambda = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2} = -\alpha \pm \beta = \lambda_1, \lambda_2$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\alpha + \beta \\ \lambda_2 = -\alpha - \beta \\ \alpha = \zeta\omega_n \\ \beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2} \end{cases}$$

非常に見通しの良い式となった

特性方程式による解の分類

[1] $\zeta > 1$ ：異なる実数解 $\longrightarrow$ $\lambda_1, \lambda_2 = -\alpha \pm \beta$

$$i(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

[2] $\zeta = 1$ ：2重解 $\longrightarrow$ $\lambda = -\zeta\omega_\mathrm{n} \pm \sqrt{(\zeta\omega_\mathrm{n})^2 - \omega_\mathrm{n}{}^2} = -\omega_\mathrm{n}$

$$i(t) = e^{-\omega_\mathrm{n} t}\left(A_1 + A_2 t\right)$$

書籍によっては

$$-\alpha = -\frac{R}{2L}$$

[3] $\zeta < 1$ ：虚数解 $\longrightarrow$ $\lambda_1, \lambda_2 = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_\mathrm{n}{}^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega$

$$i(t) = e^{-\alpha t}\left(A_1 \cos\omega t + A_2 \sin\omega t\right)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_\mathrm{n}{}^2 - \alpha^2}$$

各条件によって解が **異なる** ことに注意

[1] $\zeta > 1$：過減衰

[1] $\zeta > 1$ ：異なる実数解

$$i(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = A_1 e^{(-\alpha+\beta)t} + A_2 e^{(-\alpha-\beta)t} = e^{-\alpha t}(A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t})$$

2) **過渡** 解
及び
3) **一般** 解

4) **積分定数** A_1, A_2 ：初期条件（$i(0)=0$）から求める

$$i(0) = e^{-\alpha 0}(A_1 e^{\beta 0} + A_2 e^{-\beta 0}) = A_1 + A_2 = 0 \longrightarrow \therefore A_1 = -A_2$$

式不足！

回路の **過渡** 時の **状態** を考える

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = V \longrightarrow L\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0} = V$$

インダクタは過渡時には
開放 状態と **等価**

初期条件より
ゼロ

積分範囲が
無いためゼロ

$$\longrightarrow L\left\{(-\alpha+\beta)A_1 e^{(-\alpha+\beta)t} + (-\alpha-\beta)A_2 e^{(-\alpha-\beta)t}\right\}\Big|_{t=0} = V$$

$$\longrightarrow L\left\{(-\alpha+\beta)A_1 + (-\alpha-\beta)A_2\right\} = V$$

[1] $\zeta > 1$：過減衰

$$L\{(-\alpha+\beta)A_1+(-\alpha-\beta)A_2\}=V \longrightarrow (-\alpha+\beta)A_1+(\alpha+\beta)A_1=\frac{V}{L} \longrightarrow A_1=\frac{V}{2\beta L}=-A_2$$

以上より，電圧印加時に流れる電流 $i(t)$ は（微分方程式の **特殊解** ）

$$i(t)=e^{-\alpha t}\left(\frac{V}{2\beta L}e^{\beta t}-\frac{V}{2\beta L}e^{-\beta t}\right)=\frac{V}{2\beta L}e^{-\alpha t}\left(e^{\beta t}-e^{-\beta t}\right)$$

さらに，**双曲線** 関数 $\sinh \beta t$ を用いて表すと，$\boxed{i(t)=\frac{V}{\beta L}e^{-\alpha t}\sinh \beta t}$ となる

双曲線 関数（hyperbolic function）

$$\sinh ax=\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}, \quad \cosh ax=\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}$$

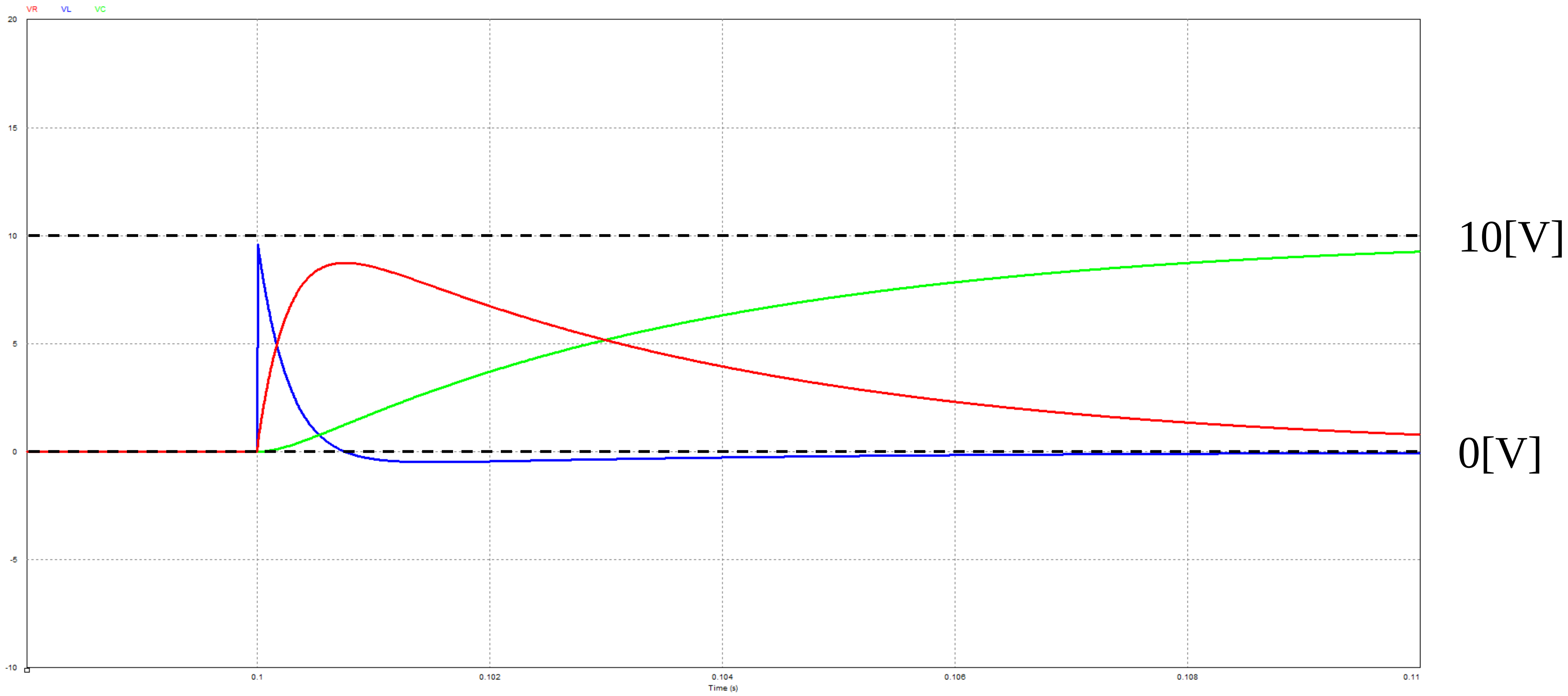
$$v_{\mathrm{L}}(t)=L\frac{di(t)}{dt}$$

$$v_{\mathrm{R}}(t)=Ri(t)$$

$$v_{\mathrm{C}}(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt$$

$v_{\mathrm{L}}(t)$ 及び $v_{\mathrm{C}}(t)$ の式は非常に複雑になるので除外

過渡時の波形：[1] $\zeta > 1$：過減衰



$V = 10[\mathrm{V}]$，$R = 4[\Omega]$，$L = 10[\mathrm{mH}]$，$C = 10[\mathrm{mF}]$，赤：$v_{\mathrm{R}}(t)$，青：$v_{\mathrm{L}}(t)$，緑：$v_{\mathrm{C}}(t)$

[2] $\zeta = 1$：臨界減衰

[2] $\zeta = 1$ ：2重解

$$i(t) = e^{-\omega_n t}\left(A_1 + A_2 t\right)$$

2) **過渡** 解　及び　3) **一般** 解

4) **積分定数** A_1, A_2 ：初期条件（$i(0) = 0$）から求める

$$i(0) = e^{-\omega_n 0}\left(A_1 + A_2 0\right) = 0 \longrightarrow A_1 = 0$$

$$L\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0} = V \longrightarrow L\left\{\frac{d}{dt}e^{-\omega_n t}\left(A_1 + A_2 t\right) + e^{-\omega_n t}\frac{d}{dt}\left(A_1 + A_2 t\right)\right\}\Bigg|_{t=0} = V$$

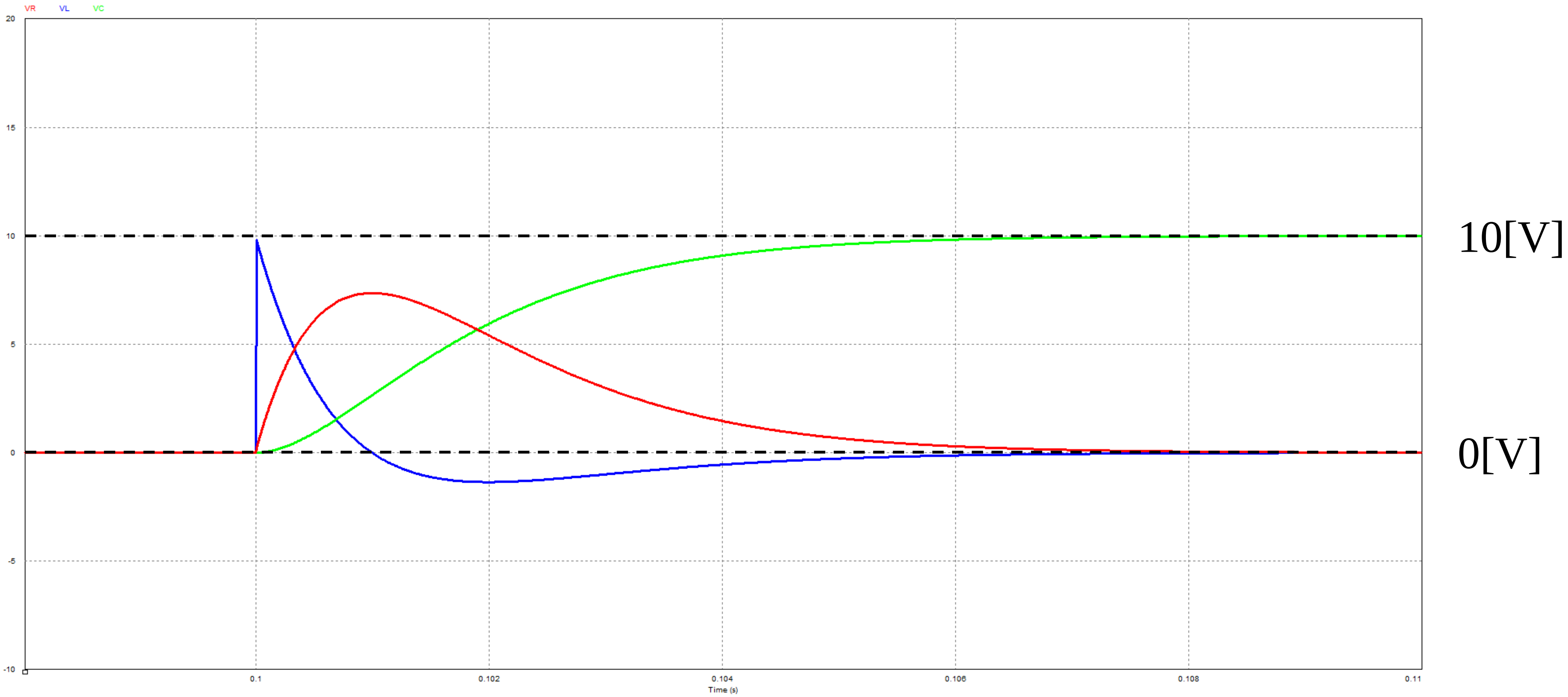
$$\longrightarrow L\left\{-\omega_n e^{-\omega_n t}\left(A_1 + A_2 t\right) + e^{-\omega_n t}A_2\right\}\Big|_{t=0} = V \longrightarrow -\omega_n A_1 + A_2 = \frac{V}{L} \longrightarrow A_2 = \frac{V}{L}$$

以上より，電圧印加時に流れる電流 $i(t)$ は（微分方程式の **特殊解** ）

$$i(t) = \frac{V}{L}te^{-\omega_n t}$$

$v_L(t)$ 及び $v_C(t)$ の式は複雑になるので除外

過渡時の波形：[2] $\zeta = 1$：臨界減衰



$V = 10[\mathrm{V}]$，$R = 2[\Omega]$，$L = 10[\mathrm{mH}]$，$C = 10[\mathrm{mF}]$，赤：$v_{\mathrm{R}}(t)$，青：$v_{\mathrm{L}}(t)$，緑：$v_{\mathrm{C}}(t)$

[3] $0 < \zeta < 1$: 不足減衰

[3] $\zeta < 1$ ：虚数解 → $\lambda_1, \lambda_2 = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_n{}^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega$

$\omega = \sqrt{\omega_n{}^2 - \alpha^2}$

$$i(t) = e^{-\alpha t}\left(A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t\right)$$

2) **過渡** 解
3) **一般** 解

4) **積分定数** A_1, A_2 ：初期条件（$i(0) = 0$）から求める

$$i(0) = e^{-\alpha 0}\left(A_1 \cos \omega 0 + A_2 \sin \omega 0\right) = 0 \longrightarrow A_1 = 0$$

回路の **過渡** 時の **状態** を考える

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = V \longrightarrow L\frac{di(t)}{dt}\bigg|_{t=0} = V$$

インダクタは過渡時には
開放 状態と **等価**

初期条件より
ゼロ

積分範囲が
無いためゼロ

[3] $0 < \zeta < 1$：不足減衰

$$L\left.\frac{di(t)}{dt}\right|_{t=0} = V \rightarrow L\left\{\frac{d}{dt}e^{-\alpha t}\left(A_1\cos\omega t + A_2\sin\omega t\right) + e^{-\alpha t}\frac{d}{dt}\left(A_1\cos\omega t + A_2\sin\omega t\right)\right\}\Bigg|_{t=0} = V$$

$$\rightarrow L\left\{-\alpha e^{-\alpha t}\left(A_1\cos\omega t + A_2\sin\omega t\right) + e^{-\alpha t}\left(-A_1\omega\sin\omega t + A_2\omega\cos\omega t\right)\right\}\Big|_{t=0} = V$$

$$\rightarrow -\alpha A_1 + A_2\omega = \frac{V}{L} \rightarrow A_2 = \frac{V}{\omega L}$$

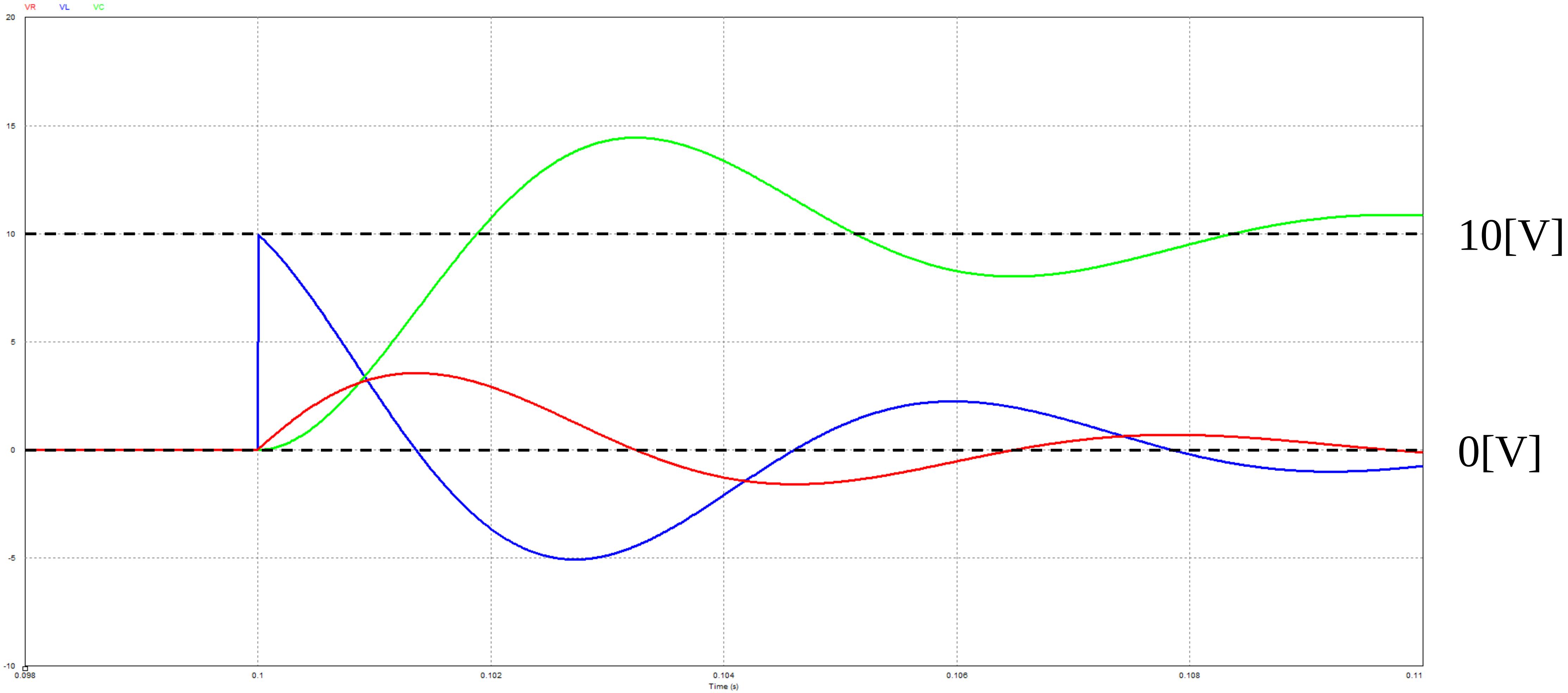
以上より，電圧印加時に流れる電流 $i(t)$ は（微分方程式の **特殊解** ）

$$i(t) = \frac{V}{\omega L}e^{-\alpha t}\sin\omega t \longrightarrow \left.\begin{aligned} v_{\mathrm{L}}(t) &= L\frac{di(t)}{dt} \\ v_{\mathrm{R}}(t) &= Ri(t) \\ v_{\mathrm{C}}(t) &= \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt \end{aligned}\right\}$$

ここで，$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \zeta\omega_{\mathrm{n}} \\ \omega &= \sqrt{\omega_{\mathrm{n}}{}^2 - \alpha^2} \end{aligned}\right.$

$v_{\mathrm{L}}(t)$ 及び $v_{\mathrm{C}}(t)$ の式は非常に複雑になるので除外

[3] $0 < \zeta < 1$：不足減衰



$V = 10$[V]，$R = 0.5[\Omega]$，$L = 10$[mH]，$C = 10$[mF]，赤：$v_R(t)$，青：$v_L(t)$，緑：$v_C(t)$

[ex-1] $\zeta = 0$：非減衰振動

[ex-1] $\zeta = 0$ になる条件を考える → $\zeta = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ より，$R = 0$（**無損失** 回路）

$$i(t) = \frac{V}{\omega L} e^{-\alpha t} \sin \omega t$$

→ ここで，

$$\begin{cases} \alpha = \zeta \omega_{\mathrm{n}} \rightarrow \alpha = 0 \\ \omega = \sqrt{\omega_{\mathrm{n}}{}^2 - \alpha^2} \rightarrow \omega = \omega_{\mathrm{n}} \end{cases}$$

$$i(t) = \frac{V}{\omega_{\mathrm{n}} L} \sin \omega_{\mathrm{n}} t = \frac{V}{L}\sqrt{LC} \sin \omega_{\mathrm{n}} t = V\sqrt{\frac{C}{L}} \sin \omega_{\mathrm{n}} t = \frac{V}{\sqrt{L/C}} \sin \omega_{\mathrm{n}} t$$

$\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ **サージ** インピーダンス

減衰（**収束**）要素である $e^{-\alpha t}$ が消えたため，共振周波数の **正弦波** 振動が現れ続ける

→ **非減衰** 振動（**持続** 振動）：**エネルギー保存則** の限界点

[ex-2] $\zeta < 0$: 発振

[ex-2] $\zeta < 0$ になる条件を考える → $\zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$ より，$R < 0$（**負性** 抵抗を使用）

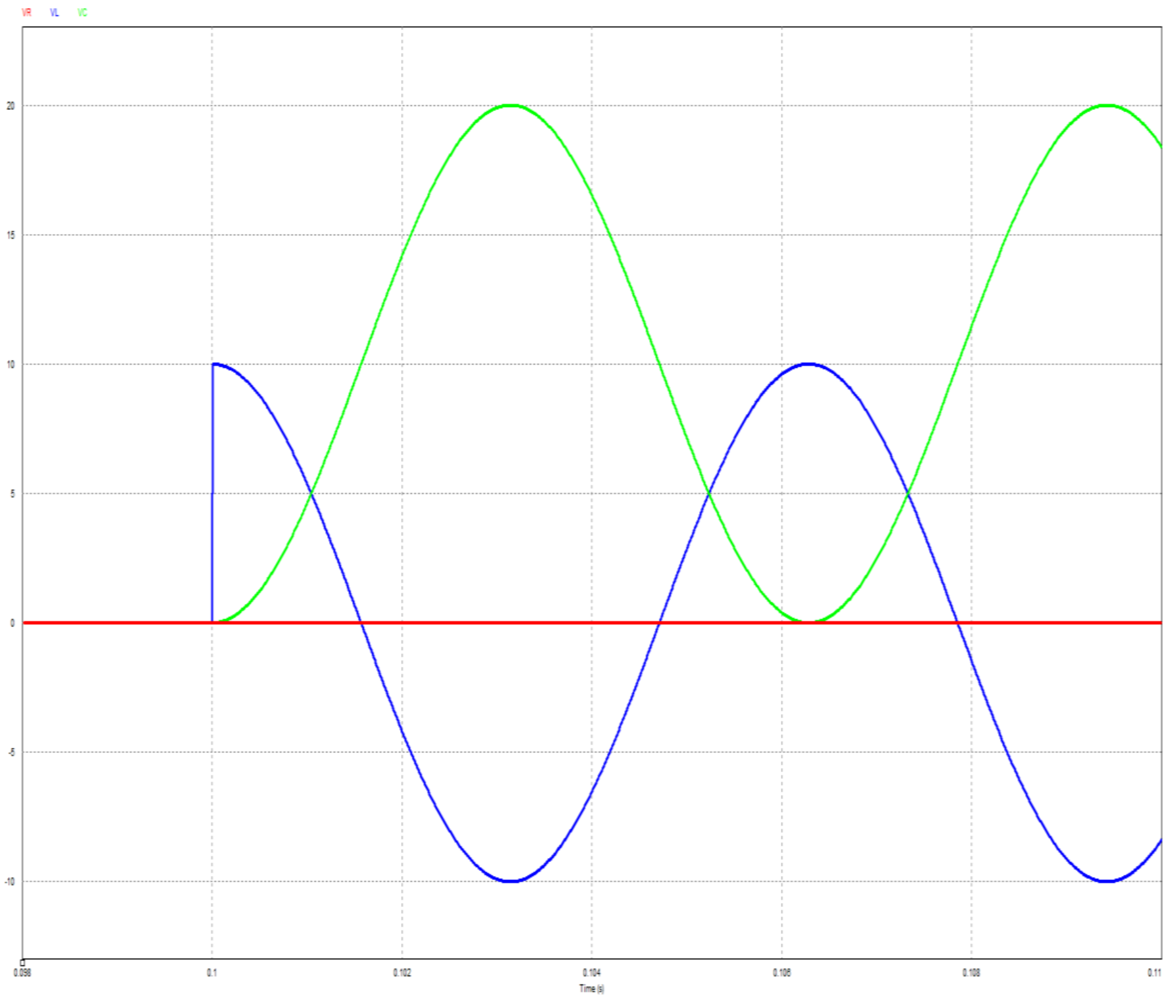
特性としては存在する
例：**エサキ** ダイオード，
ラムダ ダイオード

$i(t) = \frac{V}{\omega L} e^{-\alpha t} \sin \omega t$ → ここで，$\alpha = \zeta \omega_n$ → $\boxed{\alpha < 0}$ となる

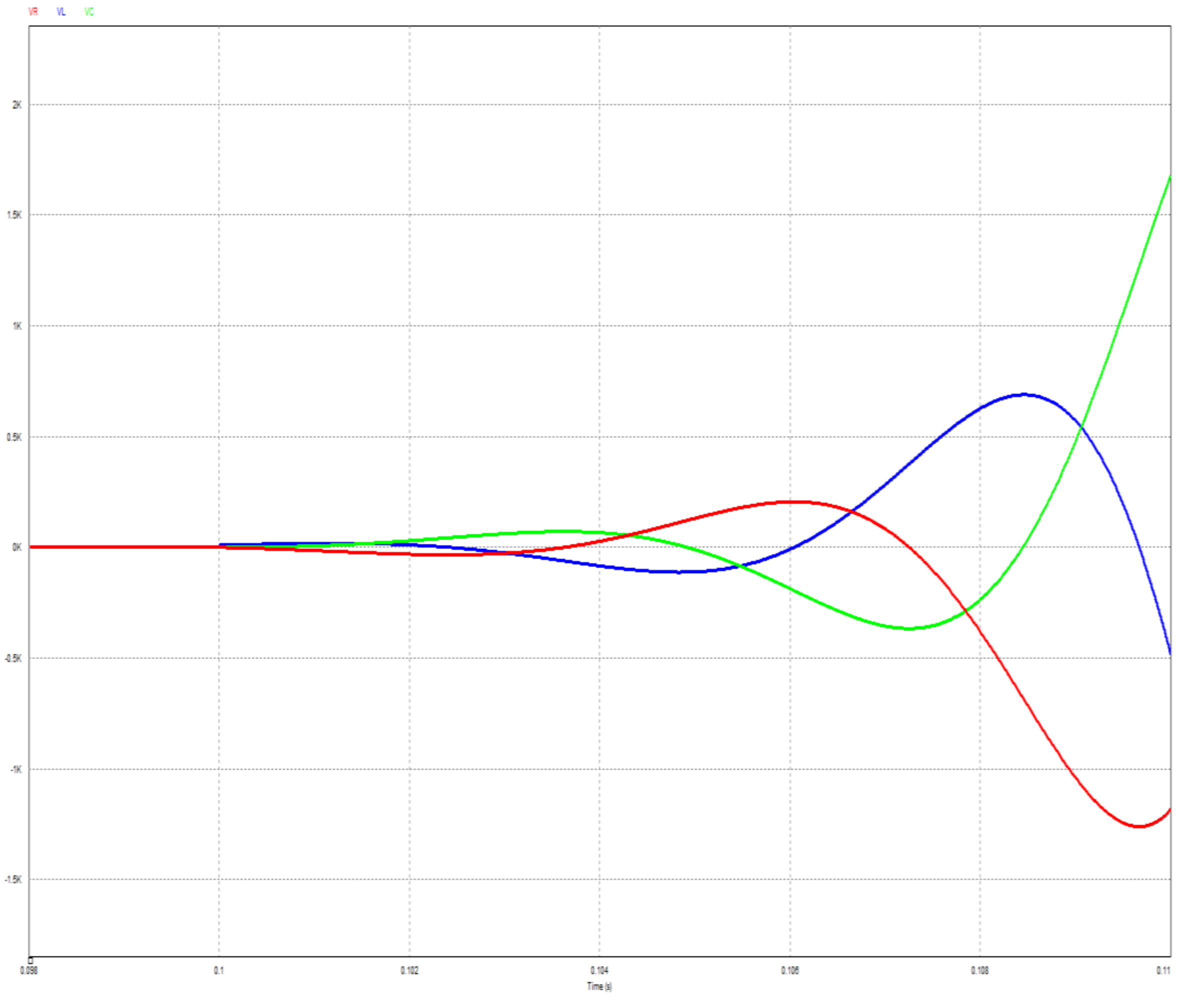
$i(t) = \frac{V}{\omega L} e^{\alpha t} \sin \omega t$ ここで，**減衰**（**収束**）要素である $e^{-\alpha t}$ の符号が変化し，
発振（**発散**）要素である $e^{\alpha t}$ となっている

発振により，回路上でエネルギーが新たに生じてしまう → **発振**：**エネルギー保存則** を満たしていない
（素子が新たに生み出すことは無い）

[ex-1] $\zeta = 0$：非減衰振動, [ex-2] $\zeta < 0$：発振



$V = 10$[V]，$R = 0$[Ω]，$L = 10$[mH]，$C = 10$[mF]，
赤：$v_R(t)$，青：$v_L(t)$，緑：$v_C(t)$



$V = 10$[V]，$R = -1$[Ω]，$L = 10$[mH]，$C = 10$[mF]，
赤：$v_R(t)$，青：$v_L(t)$，緑：$v_C(t)$