

19. ラプラス変換法の基礎 (1)

19. Fundamental of the Laplace Transform Method (1)

講義内容

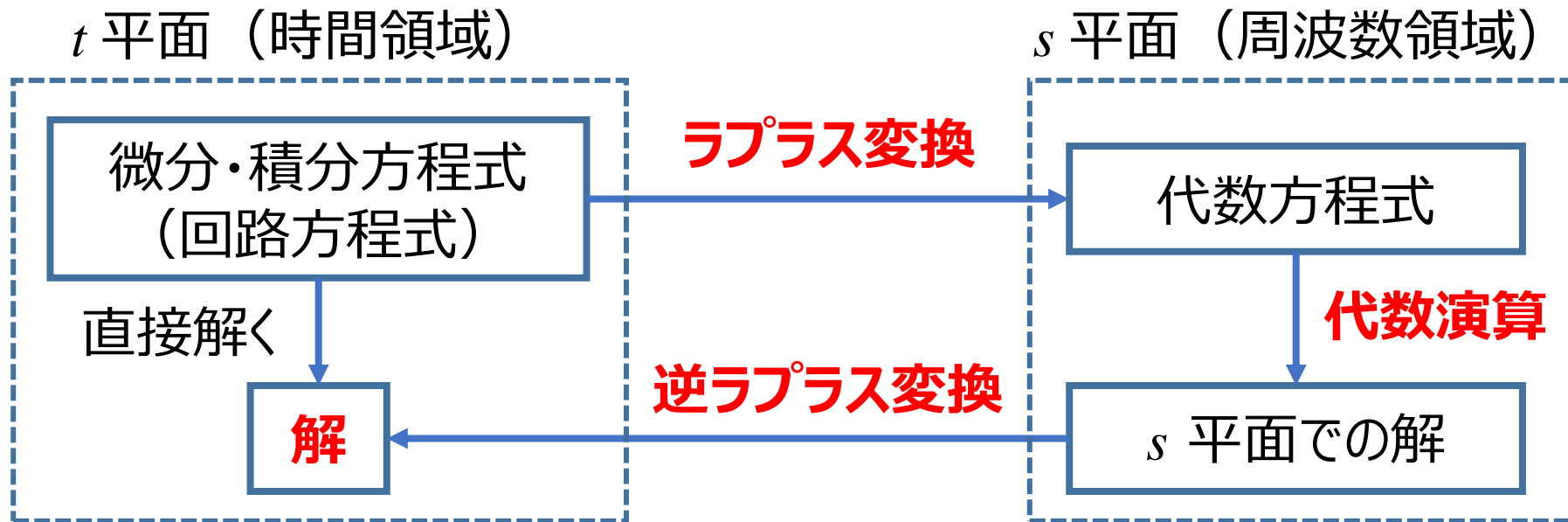
1. ラプラス変換の基礎
2. 信号波形について
3. ラプラス変換の基本則

ラプラス変換法

過渡現象の解析法

- 初等的解法 : 回路方程式を **直接解く** 方法
- ラプラス変換法 : ラプラス変換により **代数的に解く** 方法

ラプラス変換法の手順



特徴

- ラプラス変換の **基本則の理解** だけで, **簡単に解析** できる
- 初期条件が **自然に考慮** される

ラプラス変換とは？

ラプラス変換の定義

時間的に変化する関数 $f(t)$ があるとき、次式の $F(s)$ を $f(t)$ のラプラス変換という

$$F(s) \equiv \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \equiv \mathcal{L}\{f(t)\}$$

ラプラス 積分

逆に、 $f(t)$ を $F(s)$ の逆ラプラス変換、あるいは逆変換という

$$f(t) \equiv \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-ip}^{c+ip} e^{st} F(s) ds \equiv \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

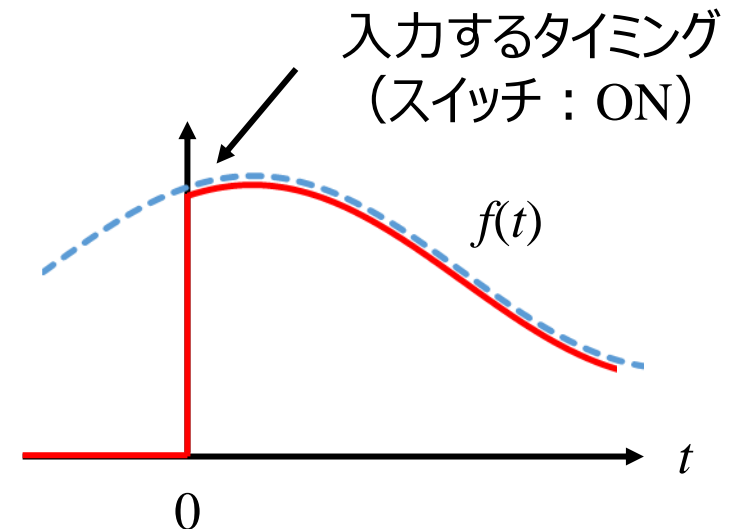
ブロムウィッチ 積分

※ 過渡解析では **公式・基本則の理解** のみで対応可能
⇒ 上式の **積分計算** は実際には **行わずに演算** できる

ラプラス変換では $t > 0$ の時間領域が定義域となるが、
電気回路では $t = 0$ に入力を加えると考えるので都合がよい

$$f(t) = f_{\text{org}}(t) \underline{u(t)} \quad \leftarrow \quad t > 0 \text{ で } 1, \quad t < 0 \text{ で } 0$$

単位ステップ 関数



ラプラス変換の基礎 (1)

積分計算は不要・・・とはいえ、基礎的な事は復習！

$f(t) = A$ (A は定数) のラプラス変換は？

$$F(s) = \int_0^{\infty} Ae^{-st} dt = A \int_0^{\infty} e^{-st} dt = A \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{A}{s}$$

$$\mathcal{L}[A] = \frac{A}{s}$$

暗記する！

$f(t) = Ae^{-at}$ のラプラス変換は？

$$F(s) = \int_0^{\infty} Ae^{-at} e^{-st} dt = A \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = A \left[-\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \right]_0^{\infty} = \frac{A}{s+a}$$

$$\mathcal{L}[Ae^{-at}] = \frac{A}{s+a}$$

$f(t) = A + Be^{-at}$ のラプラス変換は？

$$F(s) = \int_0^{\infty} (A + Be^{-at}) e^{-st} dt = A \int_0^{\infty} e^{-st} dt + B \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a}$$

以上より、一般に $\mathcal{L}[f(t)] \equiv F(s)$, $\mathcal{L}[g(t)] \equiv G(s)$ とすると、次式が成り立つ

$$\mathcal{L}[Af(t) + Bg(t)] \equiv AF(s) + BG(s)$$

線形則 という

ラプラス変換の基礎 (2)

$f(t) = \sin \omega t$ のラプラス変換は？

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} \sin \omega t \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right) e^{-st} dt = \frac{1}{2j} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-(s-j\omega)t} dt - \int_0^{\infty} e^{-(s+j\omega)t} dt \right\} \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{2j\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

暗記 する！

$f(t) = \cos \omega t$ のラプラス変換は？

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} \cos \omega t \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right) e^{-st} dt = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-(s-j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(s+j\omega)t} dt \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2s}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

暗記 する！

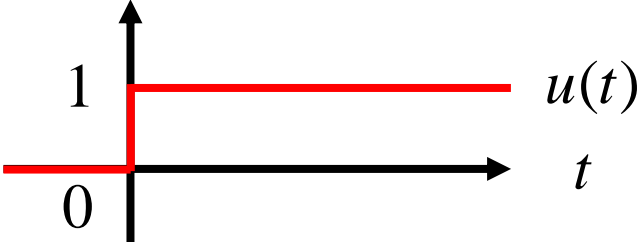
以上の **基本的** な ラプラス変換を **暗記** することで, **逆** ラプラス変換も **容易** に行える！！

信号波形について

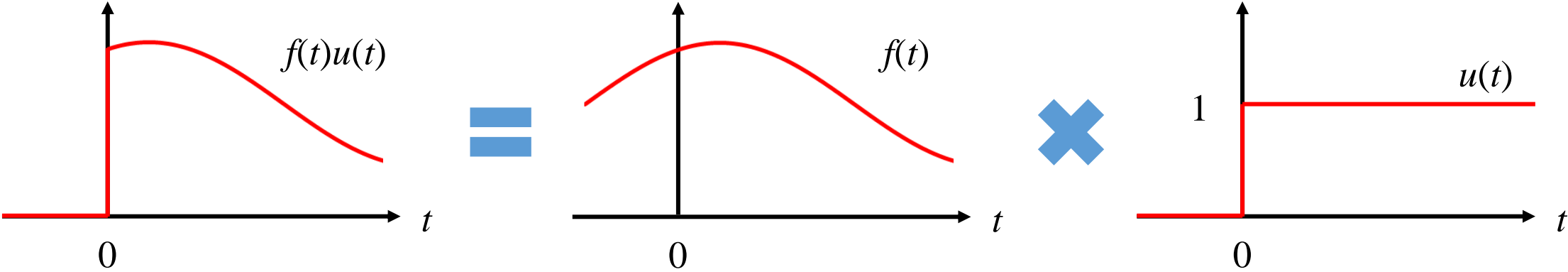
過渡解析で扱う信号 … $t < 0$ では0, $t \geq 0$ で値を持つ信号

⇒ **単位ステップ関数 $u(t)$**
用いると **表現が容易**

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



過渡解析で扱う信号の表現方法



⇒ 関数 $f(t)$ と単位ステップ関数 $u(t)$ の **積** で表現

$u(t)$ のラプラス変換

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$

暗記!

ラプラス変換の基本則

電気回路の過渡解析で利用するラプラス変換の基本則

① 線形則

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = aF(s) + bG(s)$$

② 相似則

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

③ $f(t)$ の推移則

$$\mathcal{L}[f(t-T)u(t-T)] = e^{-Ts} F(s)$$

④ $F(s)$ の推移則

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a)$$

⑤ $F(s)$ の微分則

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds} F(s)$$

⑥ $f(t)$ の微分則

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = sF(s) - f(0_-)$$

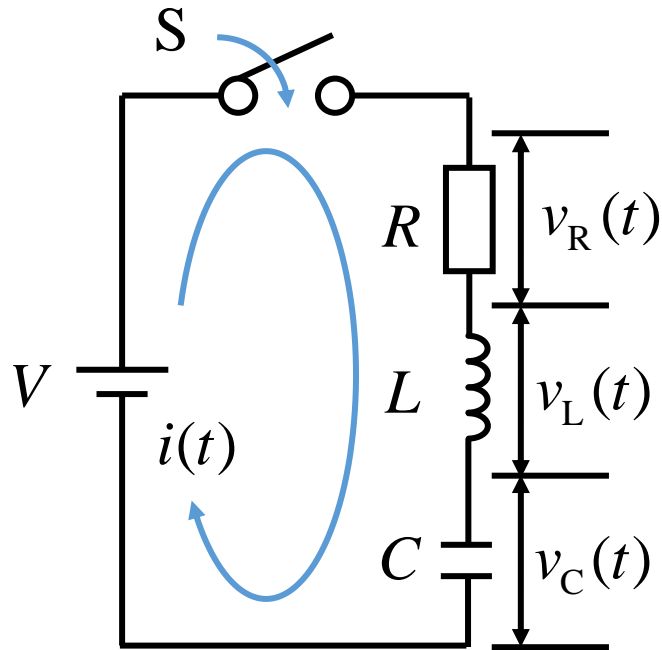
⑦ $f(t)$ の積分則

$$\mathcal{L}\left[\int_{0_-}^t f(t)dt + q(0_-)\right] = \frac{1}{s} F(s) + \frac{q(0_-)}{s}$$

基本則の活用は
問題を解くことで
慣れること！！

ここで $q(0_-) = \int_{-\infty}^{0_-} f(t)dt$ ← 初期値

RLC 回路のラプラス変換



条件

$$v_C(0) = 0$$
$$t = 0 \text{ で } S = \text{ON}$$

KVL より, $v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) = V$

微積分方程式に
変形すると, $L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = V$

ラプラス変換すると,

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{Cs} I(s) = \frac{V}{s} \Rightarrow I(s) \left(Ls + R + \frac{1}{Cs} \right) = \frac{V}{s}$$

$$\therefore I(s) = \frac{V}{s \left(Ls + R + \frac{1}{Cs} \right)} = \frac{CV}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \cdot CV$$

逆ラプラス変換を行うことで, $i(t)$ が導出できる

R/L/C 回路の解析：二次遅れ系

$$I(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \cdot CV \quad \text{ここで, } \omega_n^2 = \frac{1}{LC}, \quad \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{とすると, } \therefore I(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot CV$$

共振周波数

減衰係数

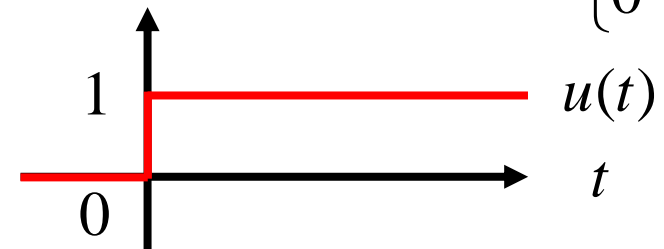
二次遅れ系の標準形

$$V_c(s) = \frac{1}{Cs} I(s) \quad \text{より, } V_c(s) = \frac{1}{Cs} I(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{Cs} \cdot CV = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{V}{s}$$

ここで、単位ステップ関数状の電源電圧 V/s を $U(s)$ とすると、

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\frac{V_c(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = G(s) \quad \text{伝達関数}$$



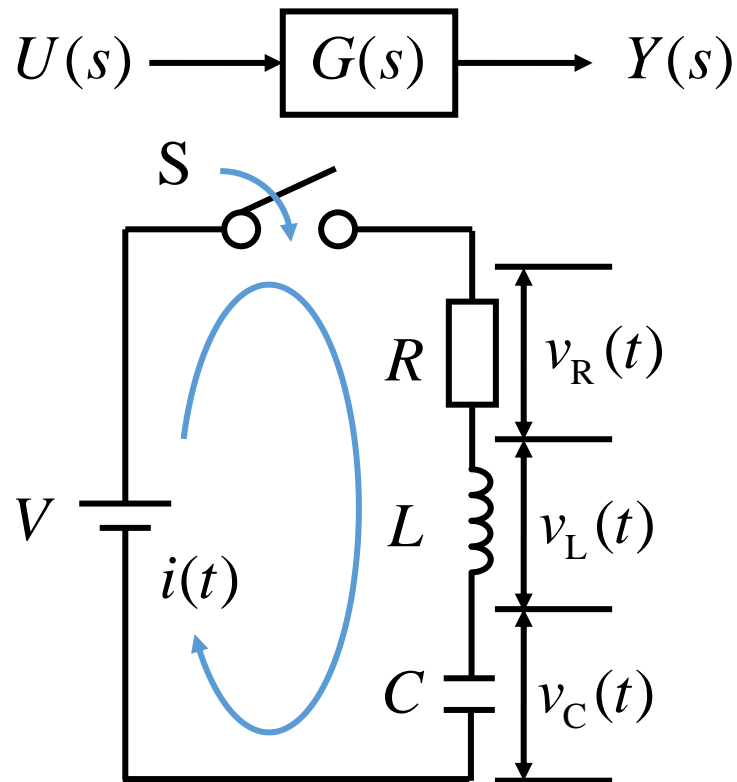
伝達関数 (Transfer Function)

伝達関数 $G(s)$

入力 $U(s)$ の **変動** に対する **出力** $Y(s)$ の **応答** を表す関数



制御工学 に
非常に重要な項目



例) ステップ応答 : $G(s) = V_c(s) / U(s)$

