19. ラプラス変換法の基礎（1）
19. Fundamental of the Laplace Transform Method (1)

講義内容

1. ラプラス変換の基礎
2. 信号波形について
3. ラプラス変換の基本則

ラプラス変換法

<u>過渡現象の解析法</u>

- 初等的解法　：回路方程式を **直接解く** 方法
- ラプラス変換法　：ラプラス変換により **代数的に解く** 方法

ラプラス変換法の手順

t 平面（時間領域）

- 微分・積分方程式（回路方程式）
- 直接解く → **解**

s 平面（周波数領域）

- 代数方程式
- **代数演算** → *s* 平面での解

微分・積分方程式（回路方程式） → **ラプラス変換** → 代数方程式

s 平面での解 → **逆ラプラス変換** → **解**

特徴

- ラプラス変換の **基本則の理解** だけで，**簡単に解析** できる
- 初期条件が **自然に考慮** される

ラプラス変換とは？

ラプラス変換の定義

時間的に変化する関数 $f(t)$ があるとき，次式の $F(s)$ を $f(t)$ のラプラス変換という

$$\boxed{F(s) \equiv \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \equiv \mathcal{L}\{f(t)\}}$$

ラプラス 積分

逆に， $f(t)$ を $F(s)$ の逆ラプラス変換，あるいは逆変換という

$$\boxed{f(t) \equiv \lim_{p \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-ip}^{c+ip} e^{st} F(s)ds \equiv \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}}$$

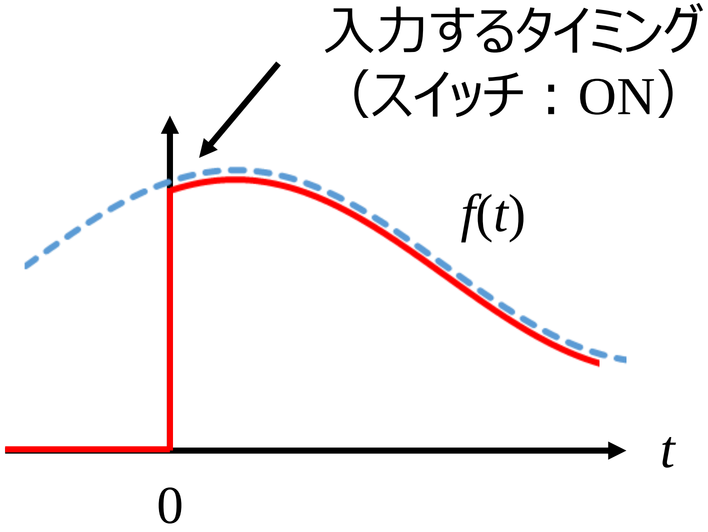
ブロムウィッチ 積分

※　過渡解析では **公式･基本則の理解** のみで対応可能

⇒　上式の **積分計算** は実際には **行わずに演算** できる

ラプラス変換では $t > 0$ の時間領域が定義域となるが，
電気回路では $t = 0$ に入力を加えると考えるので都合がよい

$f(t) = f_{\mathrm{org}}(t)\,\underline{u(t)}$ ← $t > 0$ で1， $t < 0$ で0
単位ステップ 関数



ラプラス変換の基礎（１）

積分計算は不要・・・とはいえ，基礎的な事は復習！

$f(t) = A$　（Aは定数）のラプラス変換は？

$$F(s) = \int_0^\infty A e^{-st} dt = A\int_0^\infty e^{-st} dt = A\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{A}{s}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[A] = \frac{A}{s}}$$

暗記する！

$f(t) = Ae^{-at}$　のラプラス変換は？

$$F(s) = \int_0^\infty A e^{-at} e^{-st} dt = A\int_0^\infty e^{-(s+a)t} dt = A\left[-\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\right]_0^\infty = \frac{A}{s+a}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left[Ae^{-at}\right] = \frac{A}{s+a}}$$

$f(t) = A + Be^{-at}$　のラプラス変換は？

$$F(s) = \int_0^\infty (A + Be^{-at}) e^{-st} dt = A\int_0^\infty e^{-st} dt + B\int_0^\infty e^{-(s+a)t} dt = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a}$$

以上より，一般に　$\mathcal{L}[f(t)] \equiv F(s)$　，　$\mathcal{L}[g(t)] \equiv G(s)$　とすると，次式が成り立つ

$$\boxed{\mathcal{L}\left[Af(t) + Bg(t)\right] \equiv AF(s) + BG(s)}$$

線形則という

ラプラス変換の基礎（２）

$f(t) = \sin\omega t$ のラプラス変換は？

$$F(s) = \int_0^\infty \sin\omega t \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right) e^{-st} dt = \frac{1}{2j} \left\{ \int_0^\infty e^{-(s-j\omega)t} dt - \int_0^\infty e^{-(s+j\omega)t} dt \right\}$$

$$= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{2j\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}}$$

暗記 する！

$f(t) = \cos\omega t$ のラプラス変換は？

$$F(s) = \int_0^\infty \cos\omega t \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right) e^{-st} dt = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^\infty e^{-(s-j\omega)t} dt + \int_0^\infty e^{-(s+j\omega)t} dt \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2s}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2}}$$

暗記 する！

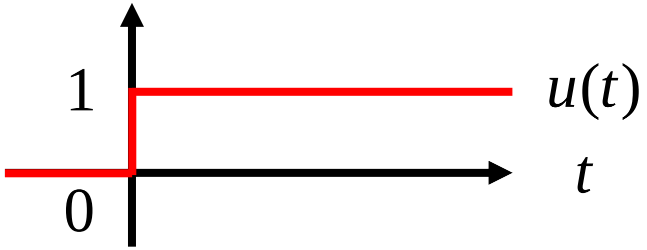
以上の **基本的** な ラプラス変換を **暗記** することで，**逆** ラプラス変換も **容易** に行える！！

信号波形について

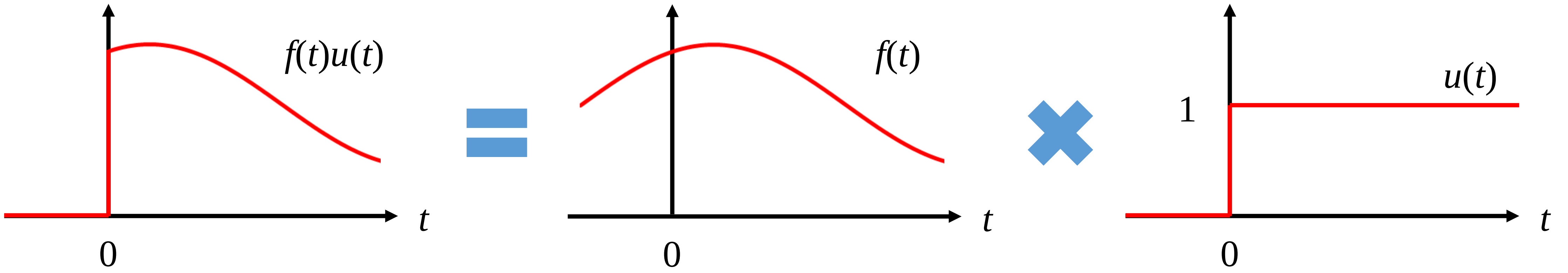
過渡解析で扱う信号 … $t<0$ では0，$t \geqq 0$で値を持つ信号

⇒ **単位ステップ関数 $u(t)$** を用いると **表現が容易**

$$u(t)=\begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$



過渡解析で扱う信号の表現方法



⇒ 関数 **$f(t)$** と単位ステップ関数 **$u(t)$** の **積** で表現

$u(t)$ のラプラス変換

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}u(t)dt=\int_0^\infty e^{-st}dt=\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty=\frac{1}{s}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[u(t)]=\frac{1}{s}}$$

暗記！

ラプラス変換の基本則

電気回路の過渡解析で利用するラプラス変換の基本則

① 線形則

$$\mathcal{L}[af(t)+bg(t)]=aF(s)+bG(s)$$

② 相似則

$$\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

③ $f(t)$の推移則

$$\mathcal{L}[f(t-T)u(t-T)]=e^{-Ts}F(s)$$

④ $F(s)$の推移則

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}f(t)\right]=F(s+a)$$

⑤ $F(s)$の微分則

$$\mathcal{L}[tf(t)]=-\frac{d}{ds}F(s)$$

基本則の活用は
問題を解くことで
慣れること！！

⑥ $f(t)$の微分則

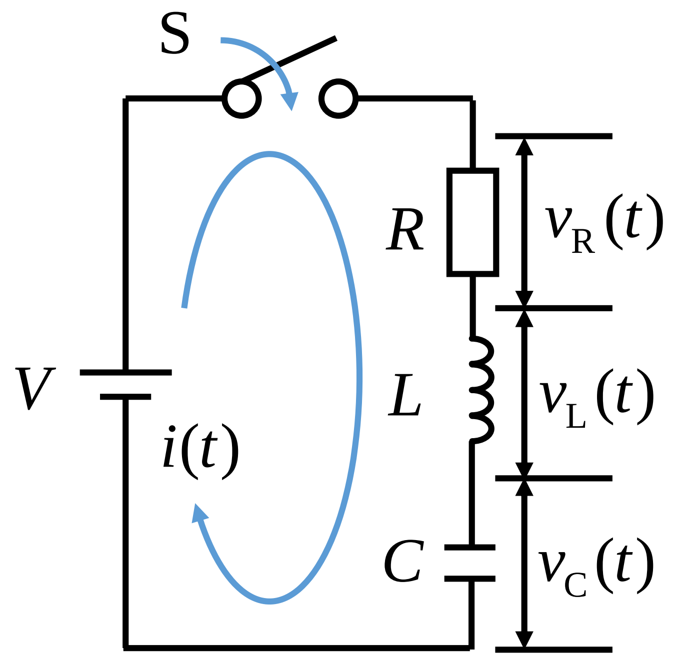
$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]=sF(s)-f(0_-)$$

⑦ $f(t)$の積分則

$$\mathcal{L}\left[\int_{0_-}^{t}f(t)dt+q(0_-)\right]=\frac{1}{s}F(s)+\frac{q(0_-)}{s}$$

ここで　$q(0_-)=\int_{-\infty}^{0_-}f(t)dt \longleftarrow$ **初期値**

RLC 回路のラプラス変換



条件

$v_C(t) = 0$

$t = 0$ で S = ON

KVL より， $v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) = V$

微積分方程式に変形すると，

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt = V$$

ラプラス変換すると，

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{Cs}I(s) = \frac{V}{s} \Rightarrow I(s)\left(Ls + R + \frac{1}{Cs}\right) = \frac{V}{s}$$

$$\therefore I(s) = \frac{V}{s\left(Ls + R + \frac{1}{Cs}\right)} = \frac{CV}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \cdot CV$$

逆ラプラス変換を行うことで， $i(t)$ が導出できる

RLC 回路の解析：二次遅れ系

$$I(s)=\frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}\cdot CV$$ ここで，$\omega_n{}^2=\frac{1}{LC}$，$\zeta=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$ とすると，$\therefore I(s)=\frac{\omega_n{}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}\cdot CV$

共振周波数　**減衰係数**　**二次遅れ** 系の **標準形**

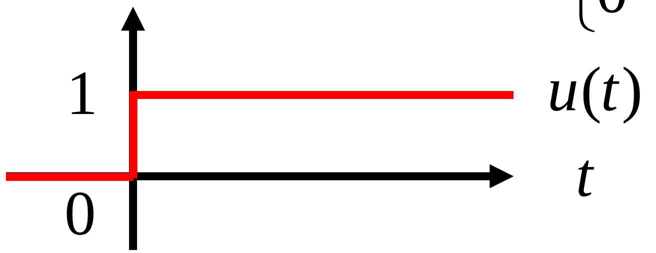
$V_c(s)=\frac{1}{Cs}I(s)$ より，$V_c(s)=\frac{1}{Cs}I(s)=\frac{\omega_n{}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}\cdot\frac{1}{Cs}\cdot CV=\frac{\omega_n{}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}\cdot\frac{V}{s}$

ここで，単位ステップ関数状の電源電圧 V/s を $U(s)$ とすると，

$$u(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

$$\frac{V_c(s)}{U(s)}=\frac{\omega_n{}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}=G(s)$$

伝達関数

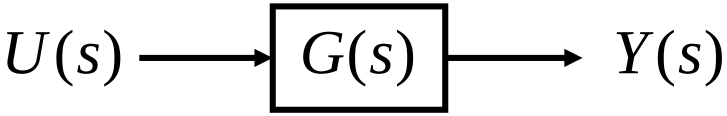


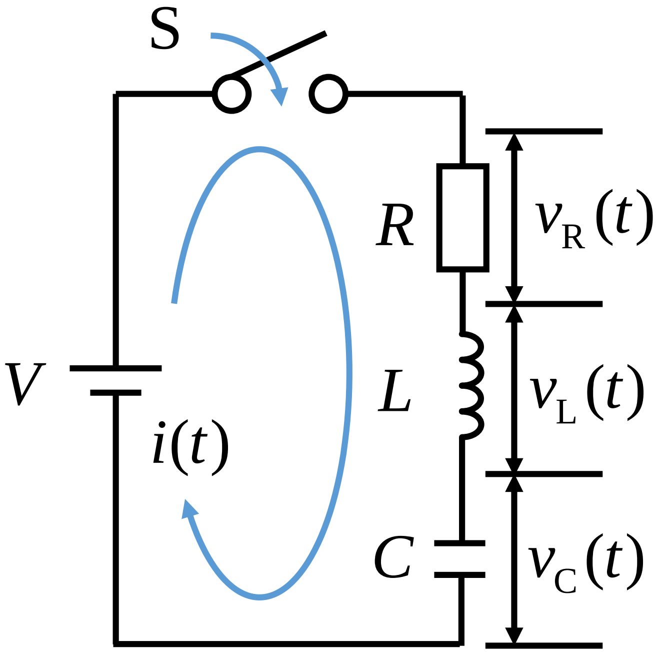
伝達関数（Transfer Function）

伝達関数$G(s)$

入力 $U(s)$の **変動** に対する **出力** $Y(s)$の **応答** を表す関数

制御工学 に
非常に重要な項目





例）ステップ応答：$G(s) = V_c(s) / U(s)$