# 20. ラプラス変換法の基礎（2）
## 20. Fundamental of the Laplace Transform Method (2)

### 講義内容

1. ラプラス変換の基礎
2. 部分分数分解
3. ヘヴィサイドの展開定理

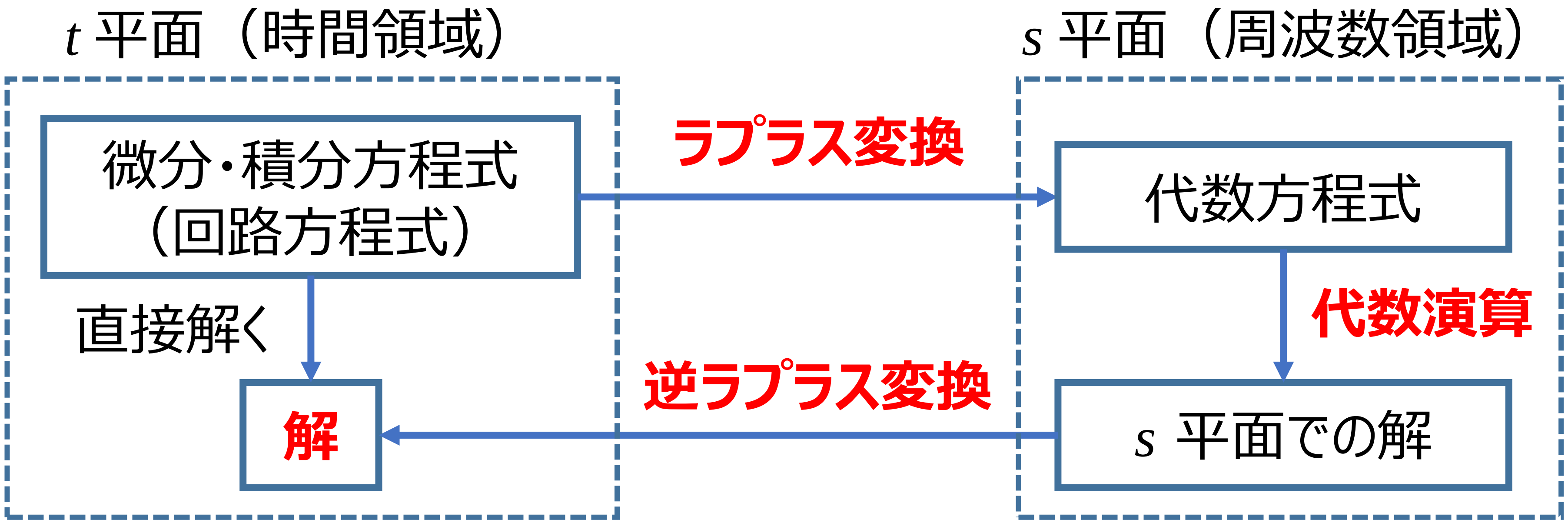
# ラプラス変換法



過渡現象の解析法

- 初等的解法　　：回路方程式を **直接解く** 方法
- ラプラス変換法：ラプラス変換により **代数的に解く** 方法

ラプラス変換法の手順




特徴

- ラプラス変換の **基本則の理解** だけで，**簡単に解析** できる
- 初期条件が **自然に考慮** される

# ラプラス変換の基礎



$f(t) = A$ （$A$は定数）のラプラス変換は？

$$F(s) = \int_0^\infty A e^{-st} dt = A \int_0^\infty e^{-st} dt = A \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^\infty = \frac{A}{s}$$

$$\mathcal{L}[A] = \frac{A}{s}$$

$f(t) = Ae^{-at}$ のラプラス変換は？

$$F(s) = \int_0^\infty A e^{-at} e^{-st} dt = A \int_0^\infty e^{-(s+a)t} dt = A \left[ -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \right]_0^\infty = \frac{A}{s+a}$$

$$\mathcal{L}\left[ Ae^{-at} \right] = \frac{A}{s+a}$$

**暗記**する！

$f(t) = \cos \omega t$ のラプラス変換は？

$$F(s) = \int_0^\infty \cos \omega t \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty \left( \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right) e^{-st} dt = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^\infty e^{-(s-j\omega)t} dt + \int_0^\infty e^{-(s+j\omega)t} dt \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2s}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

**基本的** な ラプラス変換を **暗記** することで，**逆** ラプラス変換も **容易** に行える！！

# 部分分数分解



$F(s)$の分母が **1次式** の場合 $\Rightarrow$ 簡単に **逆ラプラス変換** できる

$F(s)$の分母が **2次式以上** の場合 $\Rightarrow$ **部分分数分解** して1次式の和に変形

$\Rightarrow$ 簡単に **逆ラプラス変換** できる

$F(s)=\dfrac{1}{(s+a)(s+b)}$ の逆ラプラス変換は？

**部分分数分解**

$$F(s)=\frac{1}{(s+a)(s+b)}=\frac{A}{s+a}+\frac{B}{s+b}$$ とおく

**ヘヴィサイドの展開公式**

$$A=\lim_{s\to -a}(s+a)F(s)=\lim_{s\to -a}\frac{1}{s+b}=\frac{1}{b-a}$$

$$B=\lim_{s\to -b}(s+b)F(s)=\lim_{s\to -b}\frac{1}{s+a}=-\frac{1}{b-a}$$

$$\longrightarrow\quad F(s)=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}\right)$$

よって，

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}\right)\right]=\frac{1}{b-a}\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+b}\right]\right)=\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$$

**線形則**：逆変換でも成立

# 部分分数分解，ヘヴィサイドの展開定理

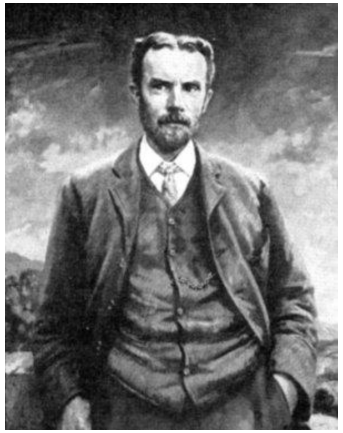


有理関数 $F(s)=\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ の部分分数分解について考える

$P(s),Q(s)$は $s$ の実数係数多項式で，$P$ の次数 $<$ $Q$ の次数とする

このとき，$F(s)$ は次のように部分分数分解される

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{b_{ij}}{(s-a_i)^j}$$



**Oliver Heaviside (1850〜1925)**

## ヘヴィサイドの展開定理 ( Heaviside's expansion theorem)

$$b_{ij}=\frac{1}{(n_i-j)!}\lim_{x\to a_i}\frac{d^{n_i-j}}{dx^{n_i-j}}\left\{(s-a_i)^{n_i}F(s)\right\}$$

**公式** を覚えるよりも
**使い方** を覚えた方が良い

# ヘヴィサイドの展開定理：$s$の解がすべて異なる場合



$$F(s)=\frac{3s+2}{s^2+6s+8}$$ の部分分数分解を求めよ

$$F(s)=\frac{3s+2}{s^2+6s+8}=\frac{3s+2}{(s+4)(s+2)}=\frac{A_2}{s+4}+\frac{A_1}{s+2}$$

きれいに **約分** できる

$$A_2=\lim_{s\to-4}(s+4)\cdot F(s)=\lim_{s\to-4}(s+4)\cdot\frac{3s+2}{(s+4)(s+2)}=\lim_{s\to-4}\frac{3s+2}{s+2}=5$$

$$A_1=\lim_{s\to-2}(s+2)\cdot F(s)=\lim_{s\to-2}(s+2)\cdot\frac{3s+2}{(s+4)(s+2)}=\lim_{s\to-2}\frac{3s+2}{s+4}=-2$$

lim の値の **符号** に注意！

従って，$$F(s)=\frac{3s+2}{s^2+6s+8}=\frac{5}{s+4}-\frac{2}{s+2}$$

# ヘヴィサイドの展開定理：$s$の解に重根が含まれる場合



$$F(s)=\frac{3s+2}{s^3+4s^2+5s+2}$$ の部分分数分解を求めよ

最初に **分母** の **因数分解** を行う

$$
\begin{array}{r}
s^2+3s+2 \\
s+1\,\big)\,\overline{s^3+4s^2+5s+2} \\
-\big)\,s^3+s^2 \qquad\qquad \\
\hline
3s^2+5s+2 \\
-\big)\,3s^2+3s \qquad \\
\hline
2s+2 \\
-\big)\,2s+2 \\
\hline
0
\end{array}
$$

$s^2+3s+2 \rightarrow (s+1)(s+2)$

**割り切れない** 場合は
$s-1$ , $s+2$ , $s-2$…
と少しずつ **変化** させる

従って,

$$F(s)=\frac{3s+2}{s^3+4s^2+5s+2}=\frac{3s+2}{(s+1)^2(s+2)}$$

**重根** を含む場合の部分分数分解の形式は

$$F(s)=\frac{3s+2}{(s+1)^2(s+2)}=\frac{B_2}{(s+1)^2}+\frac{B_1}{s+1}+\frac{A_1}{s+2}$$

# ヘヴィサイドの展開定理：$s$の解に重根が含まれる場合



$$F(s)=\frac{3s+2}{s^3+4s^2+5s+2}$$ の部分分数分解を求めよ

$$F(s)=\frac{3s+2}{s^3+4s^2+5s+2}=\frac{3s+2}{(s+1)^2(s+2)}=\frac{B_2}{(s+1)^2}+\boxed{\frac{B_1}{s+1}}+\frac{A_1}{s+2}$$

$B_1$を求める場合はこの値を
**微分** して **極限値** 導出

$$B_2=\lim_{s\to-1}(s+1)^2\cdot F(s)=\lim_{s\to-1}(s+1)^2\cdot\frac{3s+2}{(s+1)^2(s+2)}=\lim_{s\to-1}\boxed{\frac{3s+2}{s+2}}=-1$$

$$\boxed{B_1=\lim_{s\to-1}\cdot\frac{d}{ds}\left\{(s+1)^2F(s)\right\}=\lim_{s\to-1}\frac{d}{ds}\left(\frac{3s+2}{s+2}\right)=\lim_{s\to-1}\frac{3(s+2)-(3s+2)}{(s+2)^2}=4}$$

$$A_1=\lim_{s\to-2}(s+2)\cdot F(s)=\lim_{s\to-2}(s+2)\cdot\frac{3s+2}{(s+1)^2(s+2)}=\lim_{s\to-2}\frac{3s+2}{(s+1)^2}=-4$$

従って，$$F(s)=\frac{3s+2}{s^3+4s^2+5s+2}=-\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{4}{s+1}-\frac{4}{s+2}$$