

20. ラプラス変換法の基礎 (2)

20. Fundamental of the Laplace Transform Method (2)

講義内容

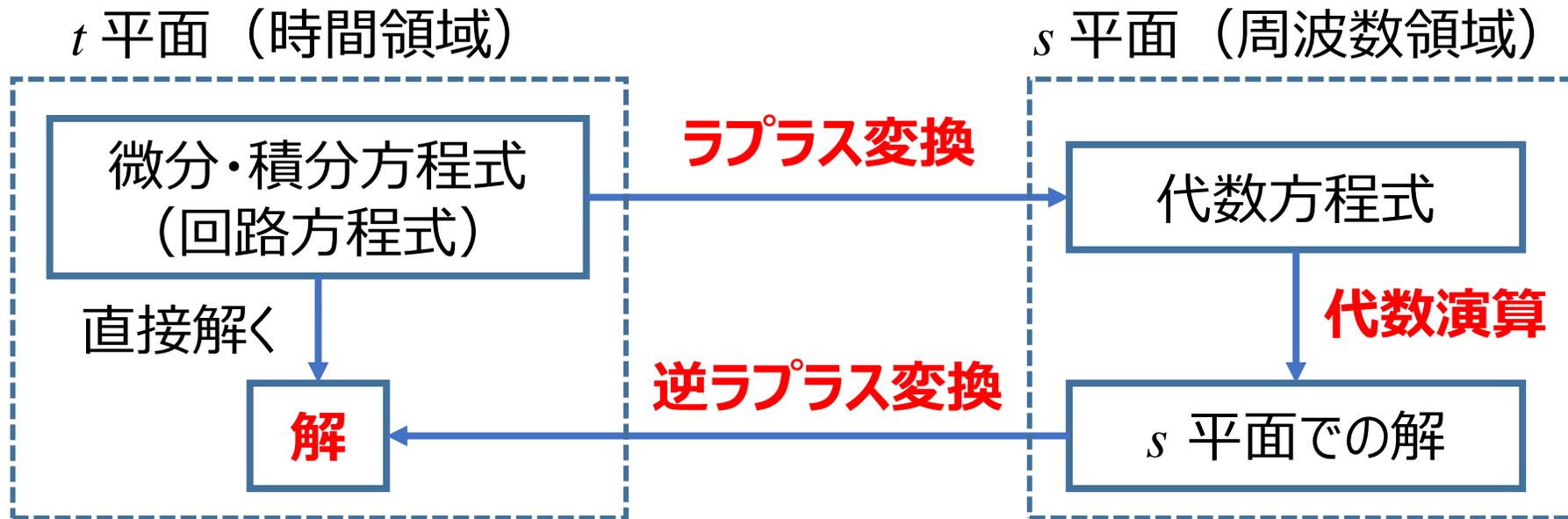
1. ラプラス変換の基礎
2. 部分分数分解
3. ヘヴィサイドの展開定理

ラプラス変換法

過渡現象の解析法

- 初等的解法 : 回路方程式を **直接解く** 方法
- ラプラス変換法 : ラプラス変換により **代数的に解く** 方法

ラプラス変換法の手順



特徴

- ラプラス変換の **基本則の理解** だけで, **簡単に解析** できる
- 初期条件が **自然に考慮** される

ラプラス変換の基礎

$f(t) = A$ (A は定数) のラプラス変換は？

$$F(s) = \int_0^{\infty} A e^{-st} dt = A \int_0^{\infty} e^{-st} dt = A \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{A}{s}$$

$$\mathcal{L}[A] = \frac{A}{s}$$

$f(t) = A e^{-at}$ のラプラス変換は？

$$F(s) = \int_0^{\infty} A e^{-at} e^{-st} dt = A \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = A \left[-\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \right]_0^{\infty} = \frac{A}{s+a}$$

$$\mathcal{L}[A e^{-at}] = \frac{A}{s+a}$$

$f(t) = \cos \omega t$ のラプラス変換は？

$$F(s) = \int_0^{\infty} \cos \omega t \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right) e^{-st} dt = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-(s-j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(s+j\omega)t} dt \right\}$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2s}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

暗記
する！

基本的 なラプラス変換を **暗記** することで, **逆** ラプラス変換も **容易** に行える！！

部分分数分解

$F(s)$ の分母が **1次式** の場合 \Rightarrow 簡単に **逆ラプラス変換** できる

$F(s)$ の分母が **2次式以上** の場合 \Rightarrow **部分分数分解** して1次式の和に変形

\Rightarrow 簡単に **逆ラプラス変換** できる

$$F(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)} \text{ の逆ラプラス変換は?}$$

$$F(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)} = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+b} \text{ とおく}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow -a} (s+a)F(s) = \lim_{s \rightarrow -a} \frac{1}{s+b} = \frac{1}{b-a}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -b} (s+b)F(s) = \lim_{s \rightarrow -b} \frac{1}{s+a} = -\frac{1}{b-a}$$

部分分数分解

ヘヴィサイドの展開公式

$$F(s) = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b} \right)$$

$$\text{よって, } f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b} \right) \right] = \frac{1}{b-a} \left(\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+a} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+b} \right] \right) = \frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$$

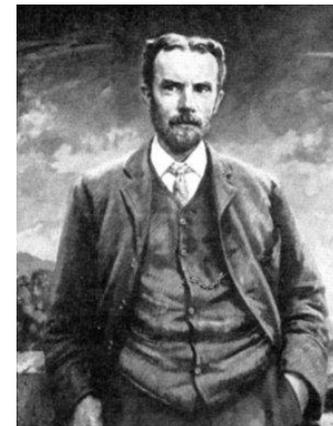
線形則 : 逆変換でも成立

部分分数分解, ヘヴィサイドの展開定理

有理関数 $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ の部分分数分解について考える

$P(s), Q(s)$ は s の実数係数多項式で, P の次数 $>$ Q の次数とする

このとき, $F(s)$ は次のように部分分数分解される

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{b_{ij}}{(s-a_i)^j}$$


Oliver Heaviside
(1850~1925)

ヘヴィサイドの展開定理 (Heaviside's expansion theorem)

$$b_{ij} = \frac{1}{(n_i - j)!} \lim_{x \rightarrow a_i} \frac{d^{n_i - j}}{dx^{n_i - j}} \left\{ (s - a_i)^{n_i} F(s) \right\}$$

公式 を覚えるよりも
使い方 を覚えた方が良い

ヘヴィサイドの展開定理： s の解がすべて異なる場合

$$F(s) = \frac{3s+2}{s^2+6s+8} \quad \text{の部分分数分解を求めよ}$$

$$F(s) = \frac{3s+2}{s^2+6s+8} = \frac{3s+2}{(s+4)(s+2)} = \frac{A_2}{s+4} + \frac{A_1}{s+2}$$

きれいに **約分** できる

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow -4} (s+4) \cdot F(s) = \lim_{s \rightarrow -4} (s+4) \cdot \frac{3s+2}{(s+4)(s+2)} = \lim_{s \rightarrow -4} \frac{3s+2}{s+2} = 5$$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) \cdot F(s) = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) \cdot \frac{3s+2}{(s+4)(s+2)} = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{3s+2}{s+4} = -2$$

従って、

$$F(s) = \frac{3s+2}{s^2+6s+8} = \frac{5}{s+4} - \frac{2}{s+2}$$

lim の値の **符号** に
注意！

ヘヴィサイドの展開定理：sの解に重根が含まれる場合

$$F(s) = \frac{3s+2}{s^3+4s^2+5s+2} \text{ の部分分数分解を求めよ}$$

最初に **分母** の **因数分解** を行う

$$\begin{array}{r} s^2 + 3s + 2 \longrightarrow (s+1)(s+2) \\ s+1 \overline{) s^3 + 4s^2 + 5s + 2} \\ \underline{- s^3 + s^2} \\ 3s^2 + 5s + 2 \\ \underline{- 3s^2 + 3s} \\ 2s + 2 \\ \underline{- 2s + 2} \\ 0 \end{array}$$

割り切れない 場合は
s-1, s+2, s-2...
と少しずつ **変化** させる

従って,

$$F(s) = \frac{3s+2}{s^3+4s^2+5s+2} = \frac{3s+2}{(s+1)^2(s+2)}$$

重根 を含む場合の部分分数分解の形式は

$$F(s) = \frac{3s+2}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{B_2}{(s+1)^2} + \frac{B_1}{s+1} + \frac{A_1}{s+2}$$

ヘヴィサイドの展開定理： s の解に重根が含まれる場合

$$F(s) = \frac{3s+2}{s^3+4s^2+5s+2} \text{ の部分分数分解を求めよ}$$

$$F(s) = \frac{3s+2}{s^3+4s^2+5s+2} = \frac{3s+2}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{B_2}{(s+1)^2} + \frac{B_1}{s+1} + \frac{A_1}{s+2}$$

B_1 を求める場合はこの値を
微分して **極限值** 導出

$$B_2 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)^2 \cdot F(s) = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)^2 \cdot \frac{3s+2}{(s+1)^2(s+2)} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{3s+2}{s+2} = -1$$

$$B_1 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \left\{ (s+1)^2 F(s) \right\} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \left(\frac{3s+2}{s+2} \right) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{3(s+2) - (3s+2)}{(s+2)^2} = 4$$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) \cdot F(s) = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) \cdot \frac{3s+2}{(s+1)^2(s+2)} = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{3s+2}{(s+1)^2} = -4$$

従って,

$$F(s) = \frac{3s+2}{s^3+4s^2+5s+2} = -\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{4}{s+1} - \frac{4}{s+2}$$