25. 周期関数と非正弦波交流

25. Periodic Function and Non-Sinusoidal Wave

講義内容

1. 背景と目的
2. 周期関数と非正弦波交流
3. フーリエ級数展開

背景と目的

一般的な交流回路

電圧
電流

正弦波交流 ← 理由

- 解析が比較的容易
- 利用上いろいろな利点あり

実際は・・・

正弦波でない交流 が多い

例えば

- 通信情報，音声
- 方形波，三角波

→ **非正弦波交流の取り扱い** の習得も非常に重要

本章で学習すること

- **非正弦波交流** が多数の周波数の異なる **正弦波の合成** であること
- その **分離** ・ **合成** の仕方

周期関数と非正弦波交流

周期関数　以下の関係が成り立つ関数　T は **周期**

$$v(t) = v(t+T)$$

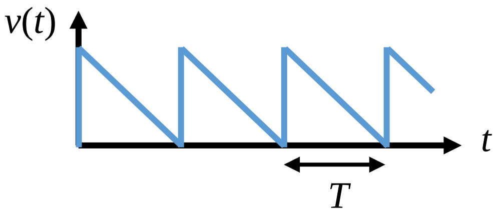
$\rightarrow f = \dfrac{1}{T}$　f は **基本周波数**

基本周波数の正弦波 ⇒ **基本波**	＋	基本波の整数倍の周波数を持つ正弦波 ⇒ **高調波**	＝	**周期波** 基本周期も同じ

非正弦波交流

例：方形波，半波整流波，のこぎり波 ⇒ すべて **周期T** を持つ周期波

周期波の波形例



- 時間変化の **遅い** 部分：**低** 周波成分
- 時間変化の **速い** 部分：**高** 周波成分

⇒周期波は次のように分解できる

$$\begin{aligned} v(t) &= a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \cdots + a_k \cos k\omega t + \cdots \\ &\quad + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \cdots + b_k \sin k\omega t + \cdots \end{aligned}$$

非正弦波 交流は **様々な** 周波数の **正弦波** の **合成** であり，**偶** 成分と **奇** 成分に **分解** できる！

ここで用いる数学①

関数 の 直交 性

任意の **異なる2つの関数の積** を **1周期積分するとゼロ** となる
関数の集合は **直交系を構成** するという

例： $1,\quad \cos\theta,\quad \cos 2\theta,\quad \cos 3\theta,\quad \cdots\quad \cos k\theta,\quad \cdots$
$\qquad \sin\theta,\quad \sin 2\theta,\quad \sin 3\theta,\quad \cdots\quad \sin k\theta,\quad \cdots$

これらは **直交系** を構成

(証明)

$$\int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos k\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{\cos(m-k)\theta + \cos(m+k)\theta\}$$

$$= \begin{cases} 0 & (m \neq k) \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta = \pi & (m = k) \end{cases}$$

※他も同様

ここで用いる数学②

三角関数 公式

$$\begin{cases} \sin m\theta \cos k\theta = \dfrac{1}{2}\{\sin(m+k)\theta + \sin(m-k)\theta\} \\ \cos m\theta \sin k\theta = \dfrac{1}{2}\{\sin(m+k)\theta - \sin(m-k)\theta\} \\ \cos m\theta \cos k\theta = \dfrac{1}{2}\{\cos(m+k)\theta + \cos(m-k)\theta\} \\ \sin m\theta \sin k\theta = -\dfrac{1}{2}\{\cos(m+k)\theta - \cos(m-k)\theta\} \end{cases}$$

半角の公式の応用

$$\begin{cases} \cos^2\theta = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta) \\ \sin^2\theta = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2\theta) \end{cases}$$

部分積分法

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

例： $\displaystyle\int t\sin At\,dt = \frac{1}{A^2}(\sin At - At\cos At)$

三角関数 の 微分・積分

$$(\sin\alpha t)' = \alpha\cos\alpha t \qquad \int \sin\alpha t\,dt = -\frac{1}{\alpha}\cos\alpha t$$

$$(\cos\beta t)' = -\beta\sin\beta t \qquad \int \cos\beta t\,dt = \frac{1}{\beta}\sin\beta t$$

フーリエ級数展開

フーリエ級数展開

任意の周期関数を次式のように展開することを **フーリエ級数展開** という

$$
\begin{aligned}
v(t) &= a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \cdots + a_k \cos k\omega t + \cdots \\
&\quad + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \cdots + b_k \sin k\omega t + \cdots = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)
\end{aligned}
$$

非正弦波交流をフーリエ級数展開して解析することを **フーリエ解析** という

- 成分a_0：**直流** 成分
- 成分a_k：**余弦波** 成分
- 成分b_k：**正弦波** 成分

（成分a_k・成分b_k）→ **交流** 成分

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 ~ 1830)

複雑な波形でも **フーリエ解析** することで
直流 成分と **正弦波** の **交流** 成分に **分解** ができる！

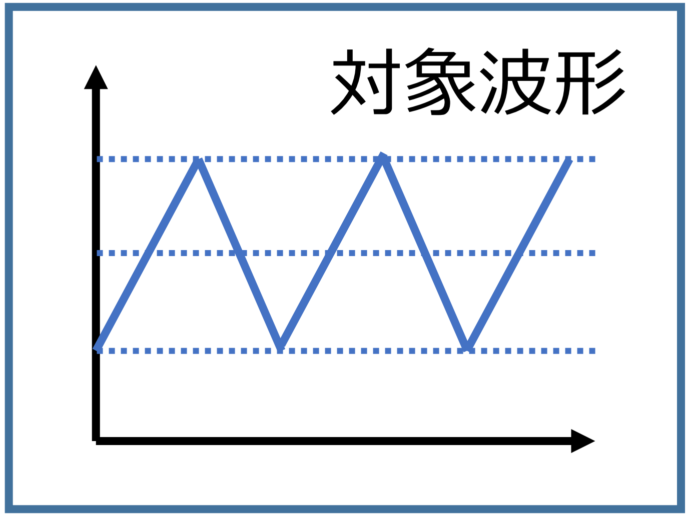
各成分の計算方法（a_0 , a_k , b_k）

各成分の計算方法

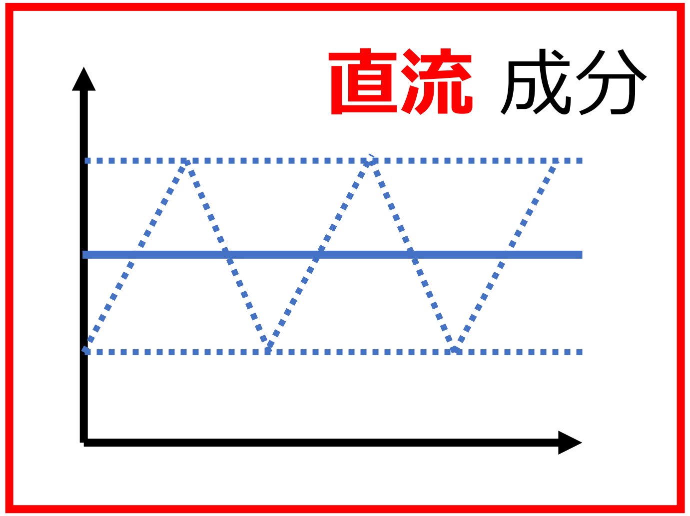
成分 a_0 ：**平均値** なので，周期波$v(t)$の **直流** 成分　1周期積分すれば求まる

$$\int_0^T v(t)dt = \int_0^T a_0 dt + \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)dt = Ta_0$$

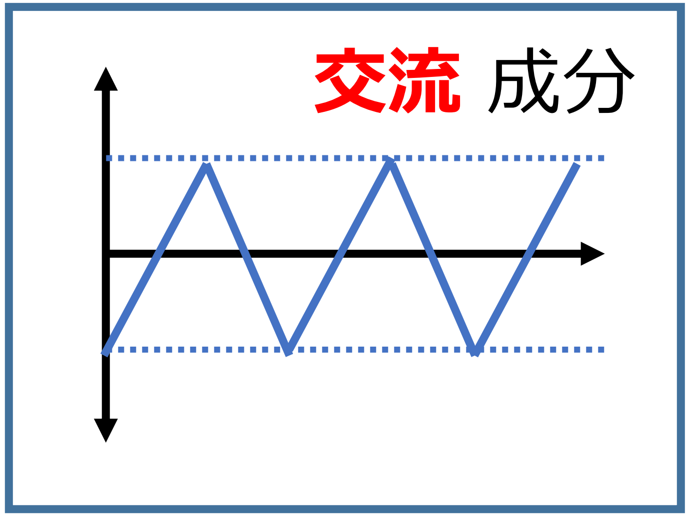
よって，　$\int_0^T v(t)dt = Ta_0$ → $\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)dt}$



＝



＋



各成分の計算方法（ a_0 , a_k , b_k ）

成分 **a_k** ：展開された各項に **$\cos k\omega t$** を掛けて **1周期積分** をすると，

$$\int_0^T v(t)\cos k\omega t dt = \int_0^T a_0 \cos k\omega t dt + \int_0^T a_1 \cos \omega t \cos k\omega t dt + \cdots + \int_0^T a_k \cos k\omega t \cos k\omega t dt + \cdots$$

三角関数の集合は **直交系** を構成し， **$\cos k\omega t$ 以外** の項は全て **ゼロ** となるので，

$$\int_0^T v(t)\cos k\omega t dt = \int_0^T a_k \cos^2 k\omega t dt = \frac{a_k}{2}\int_0^T (1+\cos 2k\omega t) dt = \frac{a_k T}{2}$$

以上より， $\int_0^T v(t)\cos k\omega t dt = \frac{a_k T}{2}$ → $\boxed{a_k = \frac{2}{T}\int_0^T v(t)\cos k\omega t dt}$

成分 **b_k** ：展開された各項に **$\sin k\omega t$** を掛けて同様の動作をすると，

$\int_0^T v(t)\sin k\omega t dt = \frac{b_k T}{2}$ → $\boxed{b_k = \frac{2}{T}\int_0^T v(t)\sin k\omega t dt}$

三角関数の合成

整理：任意の周期関数は次式のように **フーリエ級数展開** できる

$$v(t) = a_0 + a_1 \cos\omega t + a_2 \cos 2\omega t + \cdots + a_k \cos k\omega t + \cdots + b_1 \sin\omega t + b_2 \sin 2\omega t + \cdots + b_k \sin k\omega t + \cdots = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$$

ここで，

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)dt} \qquad \boxed{a_k = \frac{2}{T}\int_0^T v(t)\cos k\omega t dt} \qquad \boxed{b_k = \frac{2}{T}\int_0^T v(t)\sin k\omega t dt}$$

※ω成分を **基本波**，$k\omega$成分を **第k次調波** という　※**1周期** であれば **積分範囲は任意**

三角関数の合成　各調波成分は sin，cosで表示されるが，
同じ周波数成分を合成した方が便利な場合があり，

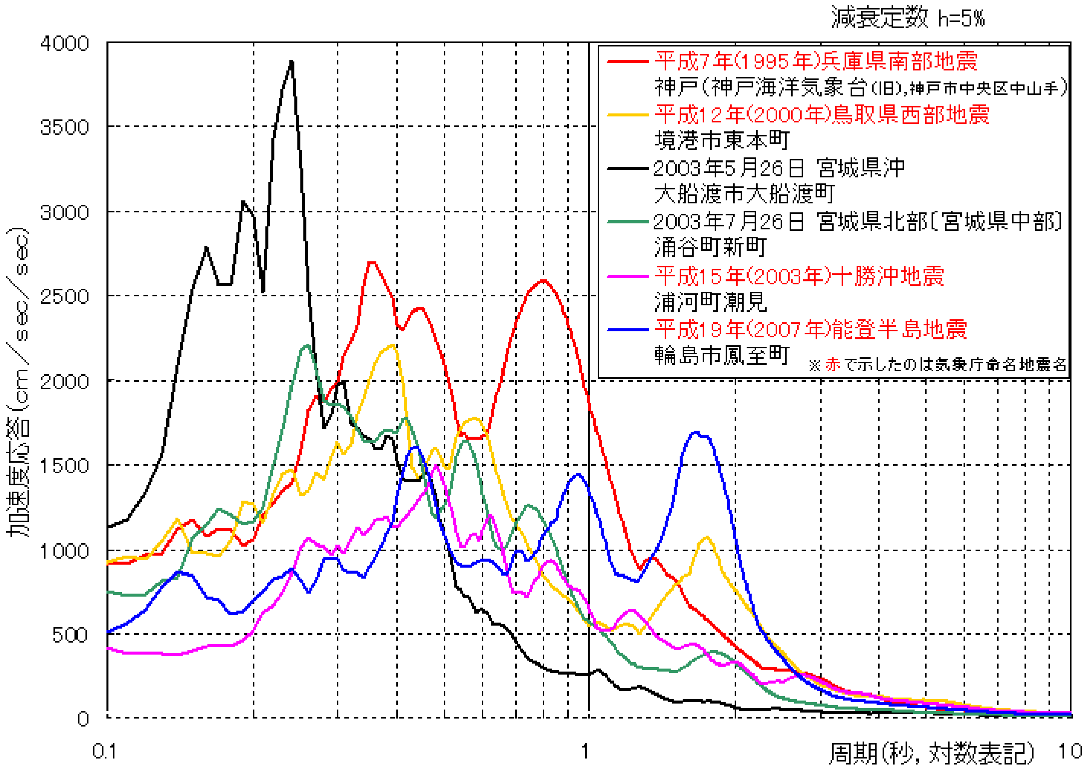
$$v(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \phi_k)$$

ここで，$A_0 = a_0$,　$A_k = \sqrt{{a_k}^2 + {b_k}^2}$,　$\phi_k = \tan^{-1}\dfrac{a_k}{b_k}$

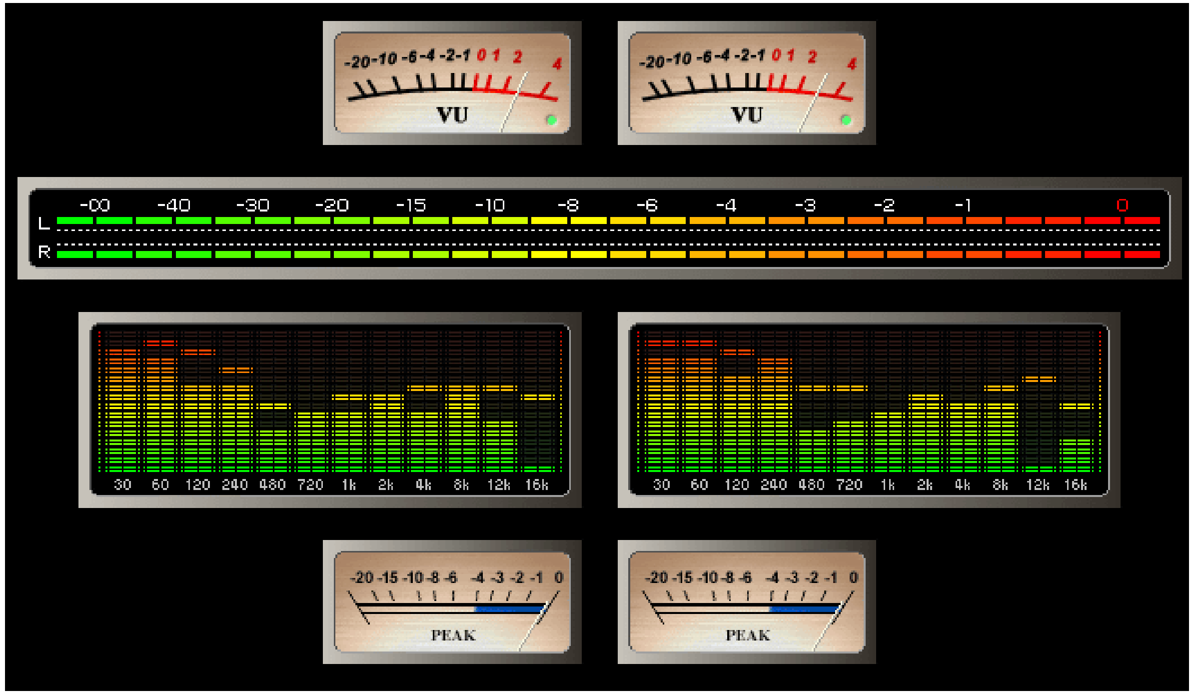
各成分の係数（$A_0, A_1, \cdots$）を **フーリエスペクトル** という

これにより，非正弦波交流の中に **各周波数成分** が **どれだけ含まれるか** がわかる！

フーリエスペクトルの応用先



各種地震の観測点における
加速度応答スペクトル



オーディオ用GUIレベルメータ
（中心：スペクトラムバー）

http://www.data.jma.go.jp/svd/eqev/data
/kyoshin/kaisetsu/outou.htm

http://www.vector.co.jp/magazine
/softnews/090724/n09072411_pic.html