26. フーリエ級数展開の応用
26. Application of the Fourier Series Expansion

講義内容

1. 変数変換（ 時間 $t \Rightarrow$ 角度 θ ）
2. フーリエ分析の例
3. 計算上便利な性質

変数変換

周期関数は時間 t [**sec**] の関数として表されるが，
位相角 θ [**rad**] の関数として記述されることも多い

t から θ に **変数変換** した場合の **フーリエ級数展開**

$$v(t) = a_0 + a_1\cos\omega t + a_2\cos 2\omega t + \cdots + a_k\cos k\omega t + \cdots$$
$$+ b_1\sin\omega t + b_2\sin 2\omega t + \cdots + b_k\sin k\omega t + \cdots = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega t + b_k\sin k\omega t)$$

変数変換 $\boxed{\theta = \omega t = \dfrac{2\pi}{T}t}$

$$\boxed{\begin{array}{l} d\theta = \dfrac{2\pi}{T}dt \Rightarrow dt = \dfrac{T}{2\pi}d\theta \\ t: 0 \to T \Rightarrow \theta: 0 \to 2\pi \end{array}}$$

$$v(\theta) = a_0 + a_1\cos\theta + a_2\cos 2\theta + \cdots + a_k\cos k\theta + \cdots$$
$$+ b_1\sin\theta + b_2\sin\theta + \cdots + b_k\sin k\theta + \cdots = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta)$$

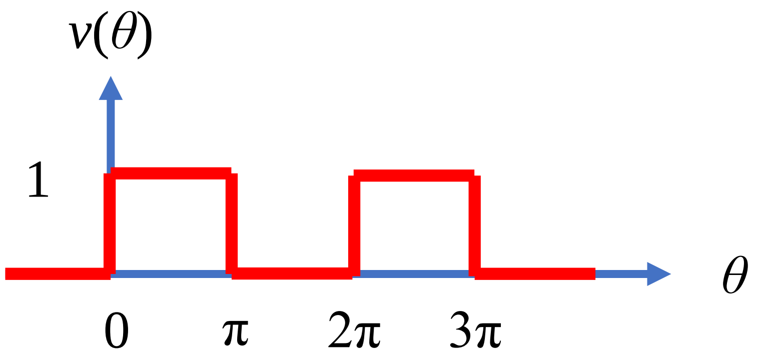
$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\theta)d\theta} \quad \boxed{a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v(\theta)\cos k\theta d\theta} \quad \boxed{b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v(\theta)\sin k\theta d\theta}$$

※ **積分範囲** は **1周期** であればよい。例えば，$-\pi \sim \pi$ もよく利用される

例題：フーリエスペクトル

図の方形波 $v(\theta)$ をフーリエ級数展開し，そのフーリエスペクトルを図示せよ。

$0 < \theta < \pi$ で $v(\theta) = 1$，$\pi < \theta < 2\pi$ で $v(\theta) = 0$ なので



$$
\begin{cases}
a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} v(\theta)d\theta = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} d\theta = \dfrac{1}{2} \\
a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} v(\theta)\cos k\theta d\theta = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos k\theta d\theta = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{1}{k}\sin k\theta\right]_0^{\pi} = 0 \\
b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} v(\theta)\sin k\theta d\theta = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin k\theta d\theta = \dfrac{1}{\pi}\left[-\dfrac{1}{k}\cos k\theta\right]_0^{\pi} = \dfrac{1}{k\pi}(1-\cos k\pi)
\end{cases}
$$

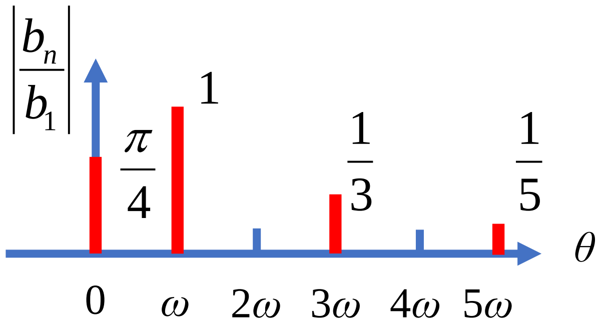
ここで，
$$
\begin{cases}
k\text{ が偶数の時：} & 1-\cos k\pi = 0 \\
k\text{ が奇数の時：} & 1-\cos k\pi = 2
\end{cases}
$$

以上より，$v(\theta)$ をフーリエ級数展開すると，

$$
v(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta + \frac{1}{5}\sin 5\theta + \cdots\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} + \sin\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta + \frac{1}{5}\sin 5\theta + \cdots\right)
$$

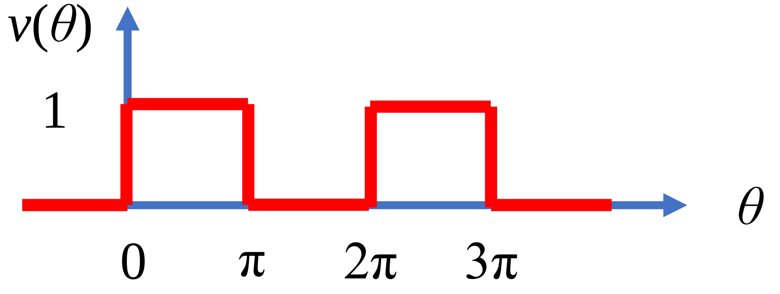
※基本派成分が
1 となるように **規格化**

フーリエスペクトルを
図示すると，



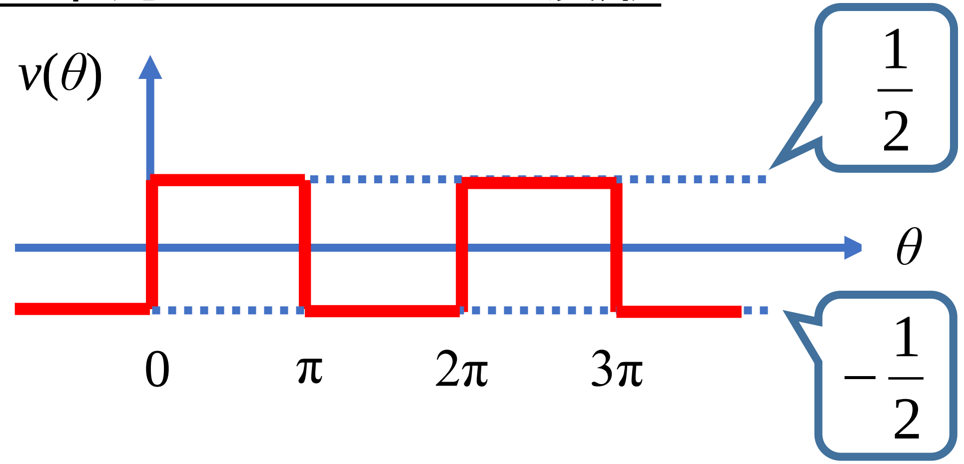
性質①：原点の移動-1

ある非正弦波交流のフーリエ展開式が **分かっている** とき，
原点 を **移動** した波形のフーリエ展開式は **容易** に **求める** ことが **できる**



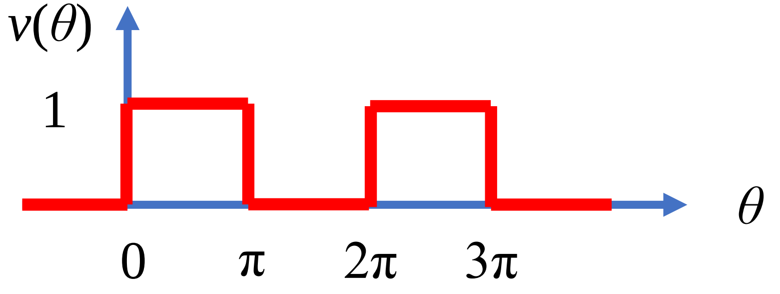
$$v(\theta)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\sin\theta+\frac{1}{3}\sin 3\theta+\frac{1}{5}\sin 5\theta+\cdots\right)$$

$v(\theta)$ を下方に 1/2 ずらした波形



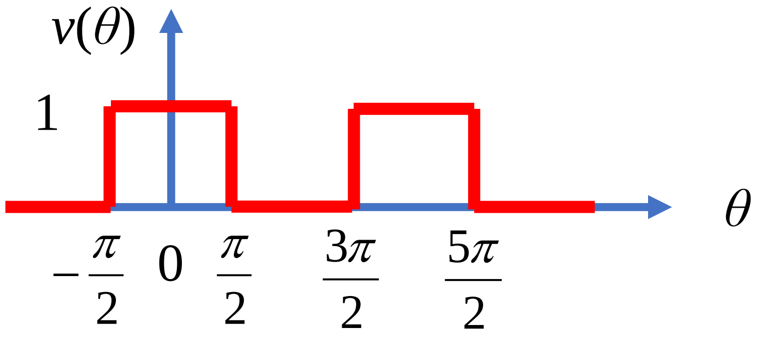
$$f(\theta)=v(\theta)-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(\sin\theta+\frac{1}{3}\sin 3\theta+\frac{1}{5}\sin 5\theta+\cdots\right)$$

性質①：原点の移動-2



$$v(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta + \frac{1}{5}\sin 5\theta + \cdots\right)$$

<u>$v(\theta)$ を $-\theta$ 方向に π/2 ずらした波形</u>



90° **270°** **90°**

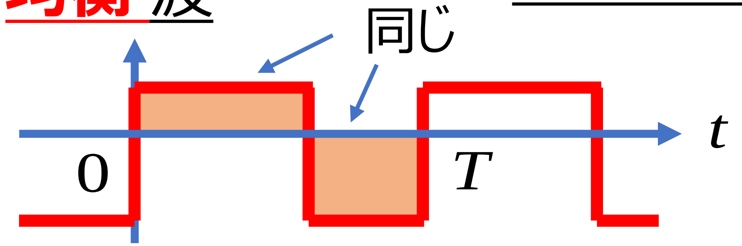
$$\begin{aligned} g(\theta) &= v\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left\{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3}\sin\left(3\theta + \frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{5}\sin\left(5\theta + \frac{5\pi}{2}\right) + \cdots\right\} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left\{\cos\theta - \frac{1}{3}\cos 3\theta + \frac{1}{5}\cos 5\theta - \cdots\right\} \end{aligned}$$

<u>270° ＝ 90° （ $\sin\theta \Rightarrow \cos\theta$ ） ＋180°（反転）</u>

性質②：対称性の効果

ある非正弦波交流が **対称性** を持つ場合，フーリエ解析が **少し容易** になる

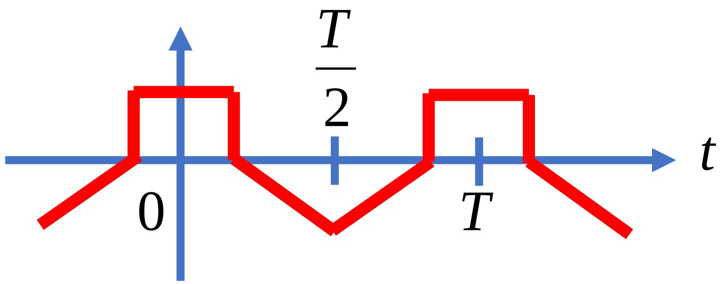
均衡 波



直流 分が **ゼロ** なので

$a_0 = 0$　　※積分計算するまでもなく！

軸対称 波



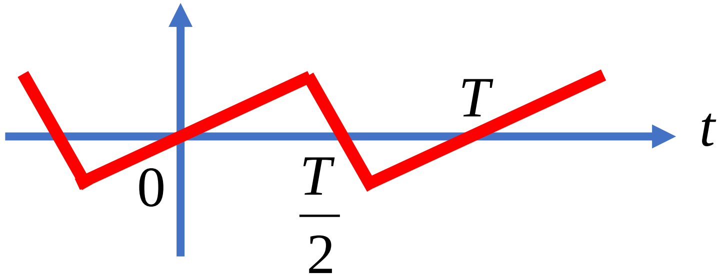
$v(t) = v(-t)$ の関係を持つ **偶** 関数の波形 ⇒ **奇** 成分は **ゼロ**
波形の **軸対称** 性 ⇒ **半周期** 積分の **2** 倍

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} v(t)dt \qquad a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} v(t)\cos k\omega t dt$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} v(\theta)d\theta \qquad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(\theta)\cos k\theta d\theta$$

$$b_k = 0$$

点対称 波



$v(t) = -v(-t)$ の関係を持つ **奇** 関数の波形 ⇒ **偶** 成分は **ゼロ**
波形の **点対称** 性 ⇒ **半周期** 積分の **2** 倍
しかも **均衡波**

$$a_0 = 0 \qquad a_k = 0 \qquad b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} v(t)\sin k\omega t dt \qquad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(\theta)\sin k\theta d\theta$$

フーリエ級数展開のまとめ①

時間の関数で与えられる場合

$$
\begin{aligned}
v(t) &= a_0 + a_1\cos\omega t + a_2\cos 2\omega t + \cdots + a_k\cos k\omega t + \cdots \\
&\quad + b_1\sin\omega t + b_2\sin 2\omega t + \cdots + b_k\sin k\omega t + \cdots = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega t + b_k\sin k\omega t)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)dt} \quad \boxed{a_k = \frac{2}{T}\int_0^T v(t)\cos k\omega t dt} \quad \boxed{b_k = \frac{2}{T}\int_0^T v(t)\sin k\omega t dt}$$

位相（角度）の関数で与えられる場合

$$
\begin{aligned}
v(\theta) &= a_0 + a_1\cos\theta + a_2\cos 2\theta + \cdots + a_k\cos k\theta + \cdots \\
&\quad + b_1\sin\theta + b_2\sin 2\theta + \cdots + b_k\sin k\theta + \cdots = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\theta)d\theta} \quad \boxed{a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v(\theta)\cos k\theta d\theta} \quad \boxed{b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v(\theta)\sin k\theta d\theta}$$

フーリエ級数展開のまとめ②

問題に波形が与えられたら…　⇒　まず，**波形の対称性** を確認！

軸 対称波	**点** 対象波	**均衡** 波	対称性無し
$b_k = 0$	$a_0 = 0$, $a_k = 0$	$a_0 = 0$	
半 周期分の波形を関数で表現		**1** 周期分の波形を関数で表現	
a_0 と a_k を **半** 周期積分計算	b_k のみ **半** 周期積分計算	a_k と b_k を **1** 周期積分計算	全ての係数を **1** 周期積分計算

波形 $g(t)$ がすでにフーリエ級数展開した波形 $v(t)$ の原点移動だったら…

⇒　波形 $v(t)$ の **展開式** を **有効活用**

横軸 方向に a の方向	**縦軸** 方向に b の移動	**斜め** 方向の移動
$g(t) = v(t-a)$	$g(t) = v(t) + b$	$g(t) = v(t-a) + b$