28. 非正弦波交流回路における各種電力

28. Each Electric Powers for Non-Sinusoidal AC Circuit

講義内容

1. 非正弦波の瞬時電力
2. 非正弦波の有効電力・皮相電力
3. 非正弦波の力率

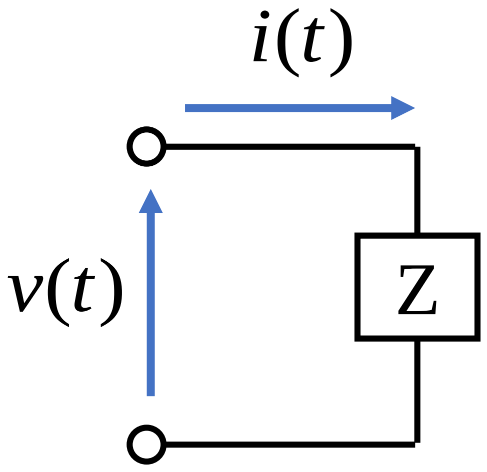
非正弦波の瞬時電力

瞬時 電力 $p(t)$

非正弦波交流の
瞬時電圧，瞬時電流を

$$v(t) = V_0 + \sum_{k=1}^{\infty} V_{\mathrm{m}k} \sin(k\omega t + \theta_k)$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{\mathrm{m}k} \sin(k\omega t + \theta_k - \phi_k)$$



とすると，瞬時電力$p(t)$は次式で与えられる

$$\begin{aligned}
p(t) &= v(t)i(t) \\
&= V_0 \cdot I_0 \quad \longleftarrow ① \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} V_{\mathrm{m}k} I_{\mathrm{m}k} \sin(k\omega t + \theta_k)\sin(k\omega t + \theta_k - \phi_k) \quad \longleftarrow ② \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \{V_0 I_{\mathrm{m}k} \sin(k\omega t + \theta_k - \phi_k) + I_0 V_{\mathrm{m}k} \sin(k\omega t + \theta_k)\} \quad \longleftarrow ③ \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ k\neq 1}}^{\infty} \{V_{\mathrm{m}k} I_{\mathrm{m}n} \sin(k\omega t + \theta_k)\sin(n\omega t + \theta_n - \phi_n)\} \quad \longleftarrow ④
\end{aligned}$$

有効電力（実効値表記）

有効 電力 P[W]

瞬時電力の式の①，②，③，④の
各項を代入して積分し，P を求める

有効電力の定義

$$P \equiv \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt$$

- ①の積分 $\frac{1}{T}\int_0^T V_0 \cdot I_0 dt = V_0 \cdot I_0$
- ②の積分 $\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} V_{mk} I_{mk} \sin(k\omega t + \theta_k)\sin(k\omega t + \theta_k - \phi_k)dt$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} V_{mk} I_{mk} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\{\cos\phi_k - \cos(2k\omega t + 2\theta_k - 2\phi_k)\}dt = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{V_{mk} I_{mk}\cos\phi_k}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} V_k I_k \cos\phi_k$$

実効値

$$V_k = \frac{V_{mk}}{\sqrt{2}}, \quad I_k = \frac{I_{mk}}{\sqrt{2}}$$

- ③と④の積分は関数の直交性などにより 0 となる

以上より，**非正弦波** の **有効** 電力Pは
以下のように **各調波** の **有効** 電力の **総和** となる

$$P = V_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} V_k I_k \cos\phi_k$$
$$= V_0 I_0 + V_1 I_1 \cos\phi_1 + V_2 I_2 \cos\phi_2 + \cdots$$

②の積分の詳細

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} V_{\mathrm{m}k} I_{\mathrm{m}k} \sin(k\omega t+\theta_k)\sin(k\omega t+\theta_k-\phi_k)dt$$ ← 定数を積分の外に出す

$$=\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{\infty} V_{\mathrm{m}k} I_{\mathrm{m}k} \int_0^T \sin(k\omega t+\theta_k)\sin(k\omega t+\theta_k-\phi_k)dt$$ ← 公式：$\sin m\theta \sin k\theta = -\frac{1}{2}\{\cos(m+k)\theta - \cos(m-k)\theta\}$

$$=\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{\infty} V_{\mathrm{m}k} I_{\mathrm{m}k} \int_0^T -\frac{1}{2}\{\cos(2k\omega t+2\theta_k-\phi_k)-\cos\phi_k\}\,dt$$ ← 積分を2つに分離

$$=\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{\infty} V_{\mathrm{m}k} I_{\mathrm{m}k} \left\{\int_0^T \frac{1}{2}\cos\phi_k dt - \int_0^T \frac{1}{2}\cos(2k\omega t+2\theta_k-\phi_k)dt\right\}$$ ← 周期関数の1周期積分 ⇒ **ゼロ**

$$=\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{\infty} V_{\mathrm{m}k} I_{\mathrm{m}k} \int_0^T \frac{1}{2}\cos\phi_k dt$$ ← 定数を積分の外に出す＋積分結果の T と $1/T$ を約分

$$=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_{\mathrm{m}k} I_{\mathrm{m}k}}{2}\cos\phi_k$$ ← 電流と電圧を **振幅**（**最大値**）から **実効値** に変更：$V_k=\frac{V_{\mathrm{m}k}}{\sqrt{2}},\ I_k=\frac{I_{\mathrm{m}k}}{\sqrt{2}}$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} V_k I_k \cos\phi_k$$

電流と電圧の位相差：　$\phi=\phi_{\mathrm{I}}-\phi_{\mathrm{V}}$　※象限が1と4の間にあれば逆も可

皮相電力と力率（実効値表記）

皮相 電力 P_a[VA]

$$P_\mathrm{a} \equiv \text{電圧の実効値} \times \text{電流の実効値}$$

$$= VI = \sqrt{(V_0{}^2 + V_1{}^2 + V_2{}^2 + \cdots)(I_0{}^2 + I_1{}^2 + I_2{}^2 + \cdots)}$$

力率 $\cos\phi = \mathrm{PF}$

※力率：PF (Power Factor)

$$\cos\phi = \frac{\text{有効 電力}}{\text{皮相 電力}}$$

$$\boxed{\text{無効電力[var]} = P_\mathrm{a}\sqrt{1 - \cos^2\phi}}$$

$$= \frac{V_0 I_0 + \sum_{k-1}^{\infty} V_k I_k \cos\phi_k}{VI} = \frac{V_0 I_0 + V_1 I_1 \cos\phi_1 + V_2 I_2 \cos\phi_2 + \cdots}{\sqrt{(V_0{}^2 + V_1{}^2 + V_2{}^2 + \cdots)(I_0{}^2 + I_1{}^2 + I_2{}^2 + \cdots)}}$$

例題

ある回路に電圧 $v(t)=10\sin\omega t+5\sin\left(3\omega t+\dfrac{\pi}{6}\right)$ を印加したとき, $i(t)=3\sin\left(\omega t-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin 3\omega t$ なる電流が流れた。次の値を求めよ。

(1) $v(t)$の実効値V_{rms}[V], (2) $i(t)$の実効値I_{rms} [A], (3) 負荷で消費される電力P[W]
(4) 皮相電力P_{a}[VA], (5) 回路の力率 $\cos\phi$

(1) $v(t)$の実効値V_{rms}[V]

基本波の振幅

第3次高調波の振幅

$$v(t)=\underline{10}\sin\underline{\omega t}+\underline{5}\sin\left(\underline{3\omega t}+\frac{\pi}{6}\right)$$

基本波

第3次高調波

$$V_{\mathrm{rms}}=\sqrt{{V_0}^2+{V_1}^2+{V_2}^2+\cdots}$$

$$=\sqrt{{V_0}^2+\frac{{V_{\mathrm{m1}}}^2+{V_{\mathrm{m2}}}^2+\cdots}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{{V_{\mathrm{m1}}}^2+{V_{\mathrm{m3}}}^2}{2}}=\sqrt{\frac{10^2+5^2}{2}}\approx 7.91[\mathrm{V}]$$

例題

(2) $i(t)$の実効値I_{rms}[A]

振幅　振幅

$$i(t) = 3\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) + \sin 3\omega t$$

基本波　第3次高調波

$$I_{\mathrm{rms}} = \sqrt{I_0^{\,2} + I_1^{\,2} + I_2^{\,2} + \cdots}$$
$$= \sqrt{I_0^{\,2} + \frac{I_{\mathrm{m1}}^{\,2} + I_{\mathrm{m2}}^{\,2} + \cdots}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{I_{\mathrm{m1}}^{\,2} + I_{\mathrm{m3}}^{\,2}}{2}} = \sqrt{\frac{3^2 + 1^2}{2}} \approx 2.24[\mathrm{A}]$$

(3) 負荷で消費される電力P[W]

有効電力 ➡ 各調波の皮相電力 × 各調波の力率

$$P = V_1 I_1 \cos\phi_1 + V_3 I_3 \cos\phi_3$$
$$= \frac{V_{1\mathrm{m}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_{1\mathrm{m}}}{\sqrt{2}} \cdot \cos\phi_1 + \frac{V_{3\mathrm{m}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_{3\mathrm{m}}}{\sqrt{2}} \cdot \cos\phi_3$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{6} - 0\right) + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 \cdot \cos\left(0 - \frac{\pi}{6}\right)$$
$$\approx 15.16$$

例題

(4) 皮相電力P_a[VA]

$$P_a = \text{電圧の実効値} \times \text{電流の実効値} = V_{rms} I_{rms}$$
$$= 7.91 \times 2.24 = 17.72[\text{VA}]$$

(5) 回路の力率 $\cos\phi$

$$\cos\phi = \frac{\textbf{有効}\ \text{電力}}{\textbf{皮相}\ \text{電力}} = \frac{P}{P_a} = \frac{15.16}{17.72} = 0.856 \approx 85.6[\%]$$

→ **無効** 電力P_rもこれらから導出することができる