29. 非正弦波電流と有効電力
29. Non-Sinusoidal Current and Active Power

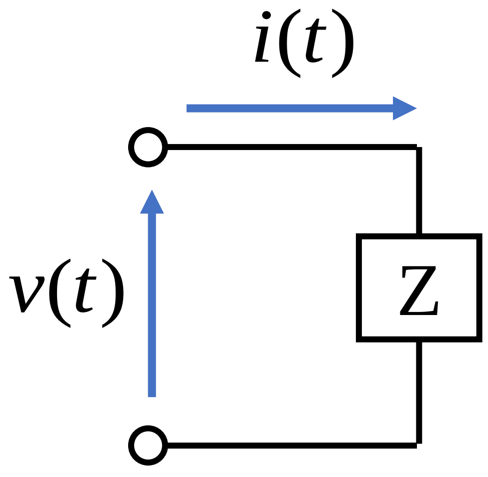
講義内容

1. 非正弦波電流と有効電力
2. 例題：誘導性負荷
3. LCR回路のインピーダンス

非正弦波電流と有効電力

インピーダンス $Z(=R+jX_k)$ に非正弦波電圧 $v(t)$ を加えた時に流れる電流 $i(t)$ を求める

$$v(t)=V_0+\sum_{k=1}^{\infty}V_{mk}\sin(k\omega t+\theta_k)$$



$$|Z_k|=\sqrt{R^2+X_k{}^2}$$

$$\phi_k=\tan^{-1}\frac{X_k}{R}$$

- **非正弦波** 電流 $i(t)$

  各調 波の **成分** がそれぞれ **別々** に **加わった** ものとして計算し，それらの **結果** を **加え合わせ** ればよい

$$i(t)=\frac{V_0}{Z_0}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{V_{mk}}{\sqrt{R^2+X_k{}^2}}\sin(k\omega t+\theta_k-\phi_k)=I_0+\sum_{k=1}^{\infty}I_{mk}\sin(k\omega t+\theta_k-\phi_k)$$

- **有効** 電力 P

  有効電力 P は **負荷** の抵抗成分 $\boldsymbol{R}$ で **消費** される **電力** に **等しい** ので

$$P=\sum_{k=1}^{\infty}I_k{}^2R=(I_0{}^2+I_1{}^2+I_2{}^2+\cdots)R$$

例題

図のRL回路に以下の電圧を印加した。次の各値を求めよ。

$$e(t) = 200\sin(\omega t + 10^\circ) + 50\sin(3\omega t + 30^\circ) + 30\sin(5\omega t + 50^\circ)[\mathrm{V}]$$

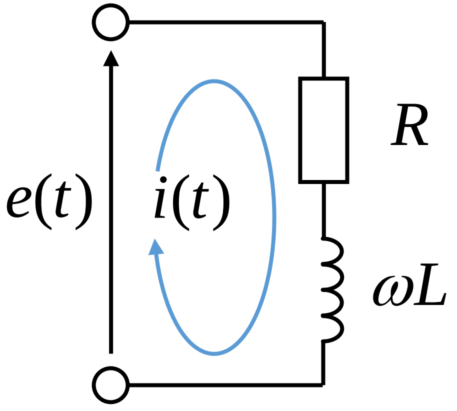
(1) 電流 $i(t)$，(2) $e(t)$の実効値E_{rms}，(3) $i(t)$の実効値I_{rms}，(4) 有効電力P，(5) 力率$\cos\Phi$

各調波のインピーダンスは

基本波　ω：$Z_1 = 4 + j3$　$|Z_1| = 5$　$\phi_1 = \tan^{-1}\dfrac{3}{4} \approx 36.9^\circ$

第3調波　3ω：$Z_3 = 4 + j9$　$|Z_3| = \sqrt{97}$　$\phi_3 = \tan^{-1}\dfrac{9}{4} \approx 66.0^\circ$

第5調波　5ω：$Z_5 = 4 + j15$　$|Z_5| = \sqrt{241}$　$\phi_5 = \tan^{-1}\dfrac{15}{4} \approx 75.1^\circ$



$R = 4[\Omega]$

$\omega L = 3[\Omega]$

これらを用いて各問を求めよ。

例題の続き

(1) 電流 $i(t)$

$$i(t)=\frac{200}{|Z_1|}\sin(\omega t+10^\circ-\phi_1)+\frac{50}{|Z_3|}\sin(3\omega t+30^\circ-\phi_3)+\frac{30}{|Z_5|}\sin(5\omega t+50^\circ-\phi_5)$$

$$=40\sin(\omega t\underline{-26.9^\circ})+5.08\sin(3\omega t\underline{-36^\circ})+1.93\sin(5\omega t\underline{-25.1^\circ})[\mathrm{A}]$$

誘導性 負荷 なので，**電圧** 波形に対して **電流** 波形の **位相** が **遅れて** いる（位相が **負** ）

(2) $e(t)$の実効値E_{rms}

$$E_{\mathrm{rms}}=\sqrt{\frac{1}{2}(E_{\mathrm{m1}}{}^2+E_{\mathrm{m3}}{}^2+E_{\mathrm{m5}}{}^2)}=\sqrt{\frac{1}{2}(200^2+50^2+30^2)}\approx 147.31[\mathrm{V}]$$

(3) $i(t)$の実効値I_{rms}

$$I_{\mathrm{rms}}=\sqrt{\frac{1}{2}(I_{\mathrm{m1}}{}^2+I_{\mathrm{m3}}{}^2+I_{\mathrm{m5}}{}^2)}=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{200}{5}\right)^2+\left(\frac{50}{\sqrt{97}}\right)^2+\left(\frac{30}{\sqrt{241}}\right)^2\right\}}\approx 28.54[\mathrm{A}]$$

例題の続き

(4) 有効電力P

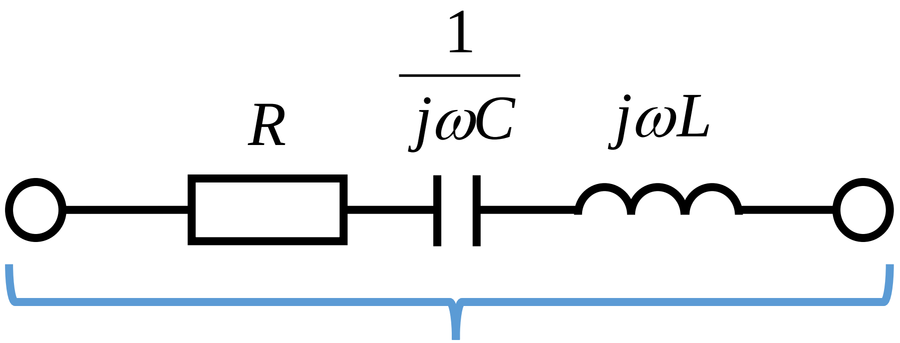
$$P = E_1 I_1 \cos\phi_1 + E_3 I_3 \cos\phi_3 + E_5 I_5 \cos\phi_5$$
$$= \frac{200}{\sqrt{2}} \cdot \frac{200}{5\sqrt{2}} \cdot \cos 36.9^\circ + \frac{50}{\sqrt{2}} \cdot \frac{50}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{97}} \cdot \cos 66.0^\circ + \frac{30}{\sqrt{2}} \cdot \frac{30}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{241}} \cdot \cos 75.1^\circ$$
$$\approx 3257.8[\mathrm{W}]$$

(5) 力率 $\cos\phi$

皮相電力 P_a は $P_\mathrm{a} = E_\mathrm{rms} I_\mathrm{rms} = 147.3 \times 28.54 \approx 4203.9[\mathrm{VA}]$

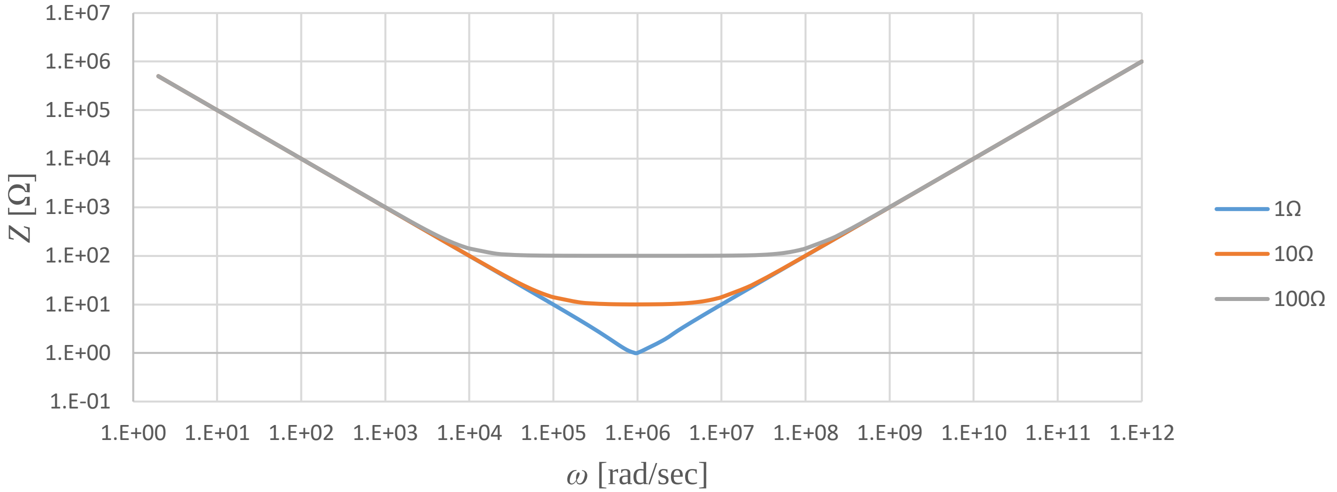
$$\cos\phi = \frac{P}{P_\mathrm{a}} = \frac{3257.8}{4203.9} \approx 0.775 = 77.5[\%]$$

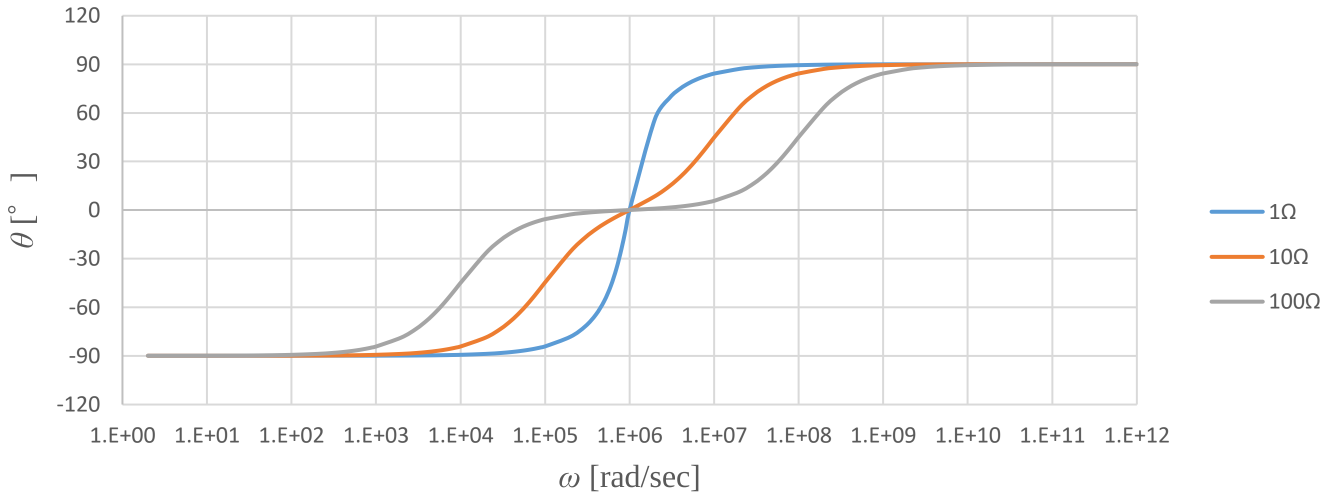
LCR回路のインピーダンス



$$Z = R + jX = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

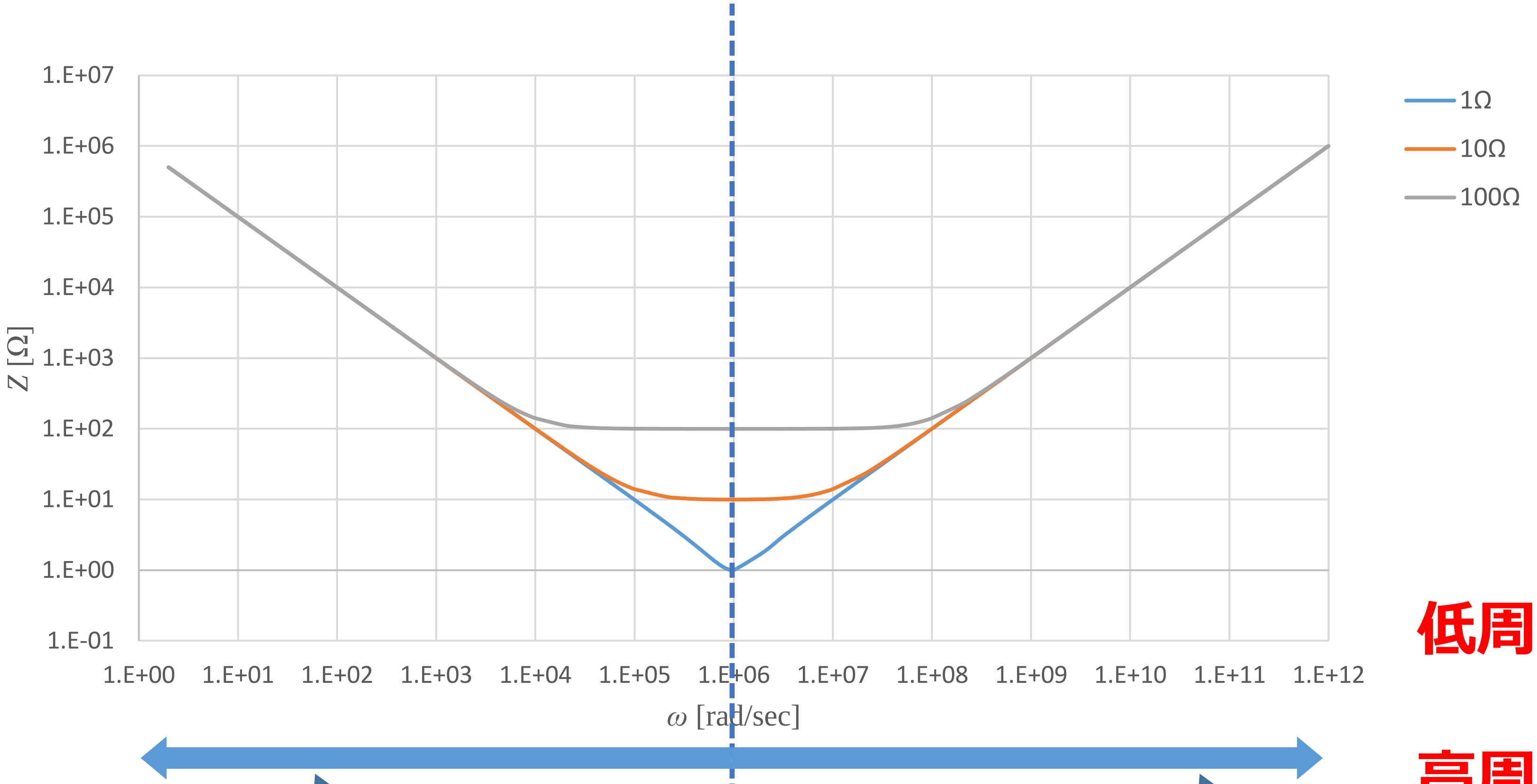
$$\Rightarrow \begin{cases} |Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \\ \phi = \tan^{-1}\frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R} \end{cases}$$





R：1[Ω],10[Ω],100[Ω]，L：1[μH]，C：1[μF]

LCR回路のインピーダンス



容量 性
（ **C** 性）

共振周波数 ω_{n}

誘導 性
（ **L** 性）

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

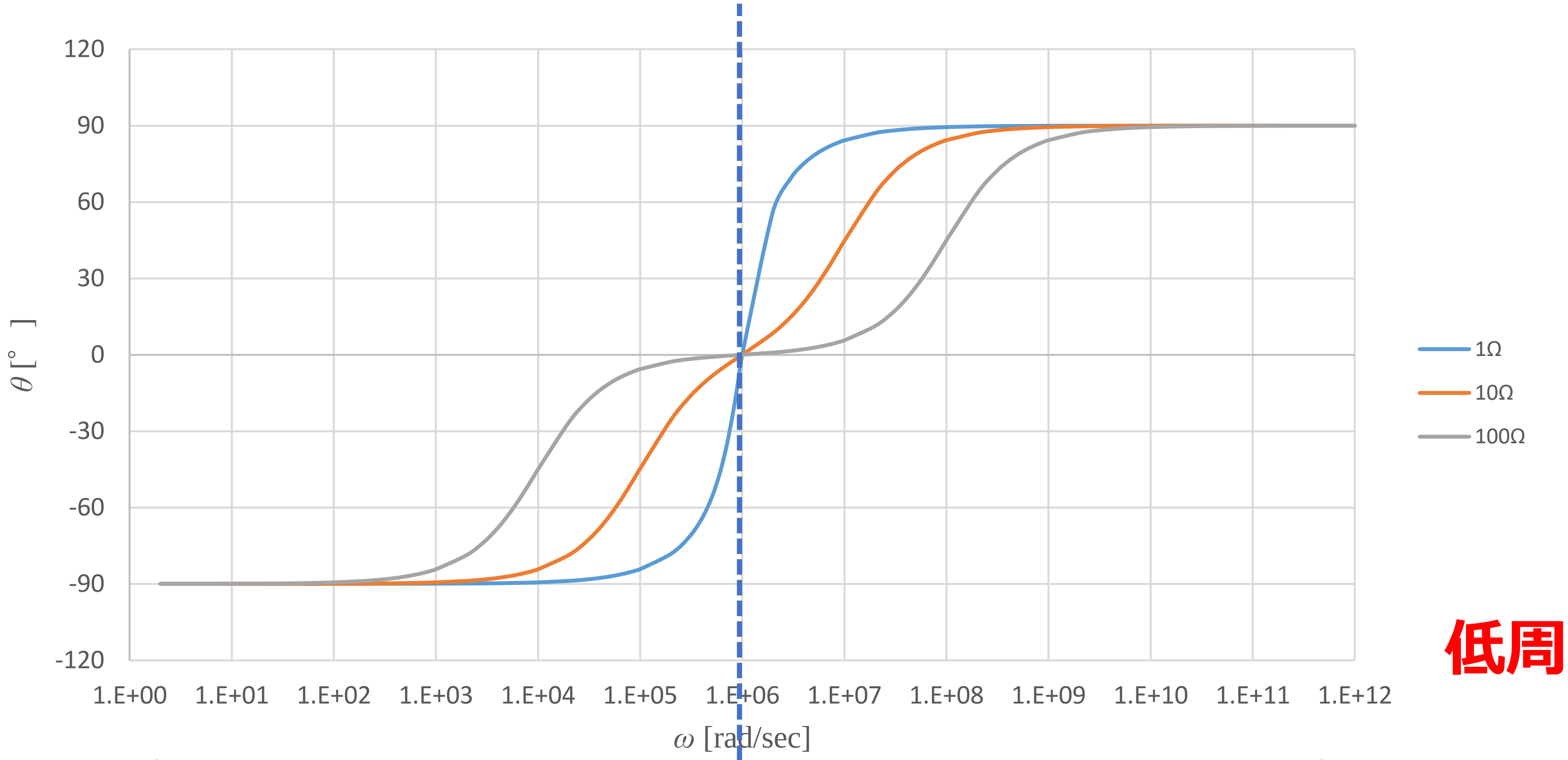
$$\omega_{\mathrm{n}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_{\mathrm{n}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

低周波 領域では $\dfrac{1}{\omega C}$ が支配的

高周波 領域では ωL が支配的

共振周波数 を境に入れ替わる

LCR回路のインピーダンス



容量 性
（ **C** 性）

共振周波数 ω_{n}

誘導 性
（ **L** 性）

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C} \right)}{R}$$

$$\omega_{\mathrm{n}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_{\mathrm{n}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

低周波 領域では $\dfrac{1}{\omega C}$ が支配的

高周波 領域では ωL が支配的

共振周波数 を境に入れ替わる