

学籍番号

氏名

2.1 次に示した二つの波形の全高調波ひずみ率 (THD) を求め、どちらがひずみ率が少ないかを定量的に示せ。計算は極力省かずに詳細に記述すること。なお、裏面を使用してもよい。

(計 100 点)

まず、上の波形について解析する。上の波形を直流成分と

交流成分に分けると、次の通りとなる。

$$\text{直流成分: } V_{dc} = \frac{V}{2} \quad \text{交流成分: } v_{ac}(t) = \begin{cases} V/2 & t = 0 \sim T/2 \\ -V/2 & T/2 \sim T \end{cases}$$

次に、交流成分の実効値は $V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \{v_{ac}(t)\}^2 dt}$ より、

$$\text{交流成分の 2 乗は } V^2/4 \text{ の直流となるので, } V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \frac{V^2}{4} \int_0^T dt} = \frac{V}{2}$$

次に、上の波形のフーリエ級数展開を求める。 $v(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$

ここで、THD を求めるには交流成分の基本波 ($n=1$) のみでよいので、

$$v_{ac}(t) \approx a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t \quad \text{を求めればよい。}$$

また、交流成分は点対称性を持っているため、偶成分はゼロとなる。 $a_1 = 0$

さらに、奇成分においても半周期積分の 2 倍を求めればよい。 $b_1 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} v_{ac}(t) \sin \omega t dt$

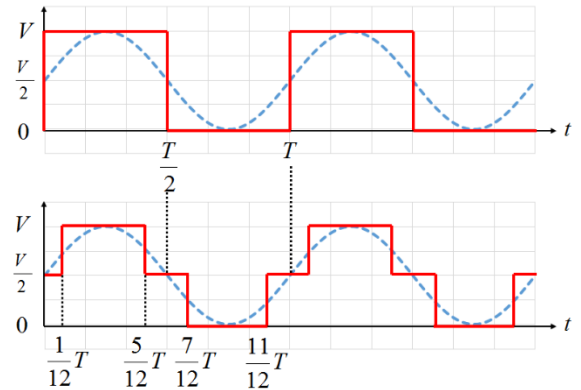
ここで、 $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ より、 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ を代入すると、 $b_1 = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} \frac{V}{2} \sin \omega t dt$ となる。

$$b_1 = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} \frac{V}{2} \sin \omega t dt = \frac{\omega V}{\pi} \left[-\frac{1}{\omega} \cos \omega t \right]_0^{\pi/\omega} = -\frac{V}{\pi} (\cos \pi - \cos 0) = -\frac{V}{\pi} \{(-1) - 1\} = \frac{2V}{\pi}$$

よって、 $v_{ac}(t) \approx \frac{2V}{\pi} \sin \omega t$ となる。最後に、基本波の実効値 V_1 を求める。

$$\text{正弦波の実効値は振幅の } \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ 倍なので, } V_1 = \frac{2V}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}V}{\pi}$$

$$\text{以上より、上の波形の全高調波ひずみは, } \text{THD} = \frac{\sqrt{V_{rms}^2 - V_1^2}}{V_1} = \frac{\sqrt{\left(\frac{V}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}V}{\pi}\right)^2}}{\frac{\sqrt{2}V}{\pi}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{8} - 1} \approx 0.483$$



次に、下の波形について解析する。

下の波形を直流成分と交流成分に分けると、次の通りとなる。

$$\text{直流成分: } V_{dc} = \frac{V}{2} \quad \text{交流成分: } v_{ac}(t) = \begin{cases} V/2 & t = T/12 \sim 5T/12 \\ -V/2 & t = 7T/12 \sim 11T/12 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

次に、交流成分の実効値を求める。

$$\begin{aligned} V_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \{v_{ac}(t)\}^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \left\{ \left(\int_{T/12}^{5T/12} \frac{V^2}{4} dt \right) + \left(\int_{7T/12}^{11T/12} \frac{V^2}{4} dt \right) \right\}} = \sqrt{\frac{V^2}{4T} \left\{ \left(\frac{5}{12} - \frac{1}{12} \right) T + \left(\frac{11}{12} - \frac{7}{12} \right) T \right\}} \\ &= \frac{V}{2} \sqrt{\frac{1}{T} \left(\frac{4}{12} T + \frac{4}{12} T \right)} = \frac{V}{2} \sqrt{\frac{8}{12}} = \frac{V}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{V}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

次に、下の波形のフーリエ級数展開を求める。ここで、THD を求めるには基本波成分で良いので

$$v_{ac}(t) \approx a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t \quad \text{を求めればよい。}$$

また、交流成分は点対称性を持っているため、偶成分はゼロとなる。 $\therefore a_1 = 0$

$$\text{さらに、奇成分においても半周期積分の2倍を求めればよい。 } b_1 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} v_{ac}(t) \sin \omega t dt = \frac{4}{T} \int_{T/12}^{5T/12} \frac{V}{2} \sin \omega t dt$$

$$\text{ここで、 } \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \text{ より、 } T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ を代入すると、 } b_1 = \frac{2\omega}{\pi} \int_{\pi/6\omega}^{5\pi/6\omega} \frac{V}{2} \sin \omega t dt \text{ となる。}$$

$$b_1 = \frac{2\omega}{\pi} \int_{\pi/6\omega}^{5\pi/6\omega} \frac{V}{2} \sin \omega t dt = \frac{\omega V}{\pi} \left[-\frac{1}{\omega} \cos \omega t \right]_{\pi/6\omega}^{5\pi/6\omega} = -\frac{V}{\pi} \left(\cos \frac{5}{6}\pi - \cos \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{V}{\pi} \left\{ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} = \frac{\sqrt{3}V}{\pi}$$

$$\text{よって、 } v_{ac}(t) \approx \frac{\sqrt{3}V}{\pi} \sin \omega t \text{ となる。最後に、基本波の実効値 } V_1 \text{ を求める。}$$

$$\text{正弦波の実効値は振幅の } \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ 倍なので、 } V_1 = \frac{\sqrt{3}V}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}V}{2\pi}$$

$$\text{以上より、下の波形の全高調波ひずみは、 } \text{THD} = \frac{\sqrt{V_{rms}^2 - V_1^2}}{V_1} = \frac{\sqrt{\left(\frac{V}{\sqrt{6}} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}V}{2\pi} \right)^2}}{\frac{\sqrt{6}V}{2\pi}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{9} - 1} \approx 0.311$$

上の波形の THD が 0.483、下の波形の THD が 0.311 より、

下の波形の方が THD が小さいため、正弦波からのひずみが小さい（正弦波に近い）と言える